



Joaquin Gimenez
Marcelo Bairral

FRACÇÕES NO CURRÍCULO DO ENSINO FUNDAMENTAL

conceituação, jogos
e atividades lúdicas



UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



pimenta
cultural



Joaquin Gimenez
Marcelo Bairral

FRAÇÕES NO CURRÍCULO DO ENSINO FUNDAMENTAL

conceituação, jogos
e atividades lúdicas



UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



2025
São Paulo

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

G491f

Gimenez, Joaquin -

Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas / Joaquin Gimenez, Marcelo Bairral. – 2ªed. São Paulo: Pimenta Cultural, 2025.

Livro em PDF

ISBN 978-85-7221-459-9

DOI 10.31560/pimentacultural/978-85-7221-459-9

1. Frações. 2. Jogos. 3. Atividades lúdicas. 4. Formação de Professores. 5. Educação Básica. I. Gimenez, Joaquin. II. Bairral, Marcelo. III. Título.

CDD 371.377

Índice para catálogo sistemático:

I. Educação – Atividades lúdicas

Simone Sales • Bibliotecária • CRB ES-000814/0

Copyright © Pimenta Cultural, alguns direitos reservados.

Copyright do texto © 2025 os autores.

Copyright da edição © 2025 Pimenta Cultural.

Esta obra é licenciada por uma Licença Creative Commons:
Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional - (CC BY-NC-ND 4.0).
Os termos desta licença estão disponíveis em:
<<https://creativecommons.org/licenses/>>.
Direitos para esta edição cedidos à Pimenta Cultural.
O conteúdo publicado não representa a posição oficial da Pimenta Cultural.

Direção editorial	Patricia Biegging Raul Inácio Busarello
Editora executiva	Patricia Biegging
Gerente editorial	Landressa Rita Schiefelbein
Assistente editorial	Júlia Marra Torres
Estagiária editorial	Ana Flávia Pivisan Kobata
Diretor de criação	Raul Inácio Busarello
Assistente de arte	Naiara Von Groll
Editoração eletrônica	Andressa Karina Voltolini
Estagiária em editoração	Stela Tiemi Hashimoto Kanada
Imagens da capa	asphotostudio, yusufpartners - Freepik.com
Tipografias	Abolition, Acumin, Neue Aachen Pro
Tradução	Paulo Henrique Colonese
Revisão e adaptação	Marcelo A. Bairral Rosa Mazo Reis Rosana de Oliveira
Revisão e atualização ortográfica e de normas da ABNT	Larissa Barbosa Finamore
Autores	Joaquin Gimenez Marcelo Bairral

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

Doutores e Doutoradas

Adilson Cristiano Habowski <i>Universidade La Salle, Brasil</i>	Bernadette Beber <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>
Adriana Flávia Neu <i>Universidade Federal de Santa Maria, Brasil</i>	Bruna Carolina de Lima Siqueira dos Santos <i>Universidade do Vale do Itajaí, Brasil</i>
Adriana Regina Vettorazzi Schmitt <i>Instituto Federal de Santa Catarina, Brasil</i>	Bruno Rafael Silva Nogueira Barbosa <i>Universidade Federal da Paraíba, Brasil</i>
Aguimario Pimentel Silva <i>Instituto Federal de Alagoas, Brasil</i>	Caio Cesar Portella Santos <i>Instituto Municipal de Ensino Superior de São Manuel, Brasil</i>
Alaim Passos Bispo <i>Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil</i>	Carla Wanessa do Amaral Caffagni <i>Universidade de São Paulo, Brasil</i>
Alaim Souza Neto <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>	Carlos Adriano Martins <i>Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil</i>
Alessandra Knoll <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>	Carlos Jordan Lapa Alves <i>Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Brasil</i>
Alessandra Regina Müller Germani <i>Universidade Federal de Santa Maria, Brasil</i>	Caroline Chioquetta Lorenset <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>
Aline Corso <i>Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Brasil</i>	Cassia Cordeiro Furtado <i>Universidade Federal do Maranhão, Brasil</i>
Aline Wendpap Nunes de Siqueira <i>Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil</i>	Cássio Michel dos Santos Camargo <i>Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil</i>
Ana Rosangela Colares Lavand <i>Universidade Estadual do Norte do Paraná, Brasil</i>	Cecilia Machado Henriques <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>
André Gobbo <i>Universidade Federal da Paraíba, Brasil</i>	Christiano Martino Otero Avila <i>Universidade Federal de Pelotas, Brasil</i>
André Tanus Cesário de Souza <i>Faculdade Anhanguera, Brasil</i>	Cláudia Samuel Kessler <i>Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil</i>
Andressa Antunes <i>Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil</i>	Cristiana Barcelos da Silva <i>Universidade do Estado de Minas Gerais, Brasil</i>
Andressa Wiebusch <i>Universidade Federal de Santa Maria, Brasil</i>	Cristiane Silva Fontes <i>Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil</i>
Andreza Regina Lopes da Silva <i>Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil</i>	Daniela Susana Segre Guertzenstein <i>Universidade de São Paulo, Brasil</i>
Angela Maria Farah <i>Universidade de São Paulo, Brasil</i>	Daniele Cristine Rodrigues <i>Universidade de São Paulo, Brasil</i>
Anísio Batista Pereira <i>Universidade do Estado do Amapá, Brasil</i>	Dayse Centurion da Silva <i>Universidade Anhanguera, Brasil</i>
Antonio Edson Alves da Silva <i>Universidade Estadual do Ceará, Brasil</i>	Dayse Sampaio Lopes Borges <i>Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Brasil</i>
Antonio Henrique Coutelo de Moraes <i>Universidade Federal de Rondonópolis, Brasil</i>	Deilson do Carmo Trindade <i>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, Brasil</i>
Arthur Vianna Ferreira <i>Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil</i>	Diego Pizarro <i>Instituto Federal de Brasília, Brasil</i>
Ary Albuquerque Cavalcanti Junior <i>Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil</i>	Dorama de Miranda Carvalho <i>Escola Superior de Propaganda e Marketing, Brasil</i>
Asterlindo Bandeira de Oliveira Júnior <i>Universidade Federal da Bahia, Brasil</i>	Edilson de Araújo dos Santos <i>Universidade de São Paulo, Brasil</i>
Bárbara Amaral da Silva <i>Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil</i>	Edson da Silva <i>Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil</i>

Elena Maria Mallmann

Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Eleonora das Neves Simões

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Eliane Silva Souza

Universidade do Estado da Bahia, Brasil

Elvira Rodrigues de Santana

Universidade Federal da Bahia, Brasil

Estevão Schultz Campos

Centro Universitário Adventista de São Paulo, Brasil

Éverly Pegoraro

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Fábio Santos de Andrade

Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil

Fabrícia Lopes Pinheiro

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Fauston Negreiros

Faustidade de Brasília, Brasil

Felipe Henrique Monteiro Oliveira

Universidade Federal da Bahia, Brasil

Fernando Vieira da Cruz

Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Flávia Fernanda Santos Silva

Universidade Federal do Amazonas, Brasil

Gabriela Moysés Pereira

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Gabriella Eldereti Machado

Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Germano Ehler Pollnow

Universidade Federal de Pelotas, Brasil

Geuciane Felipe Guerim Fernandes

Universidade Federal do Pará, Brasil

Geymeesson Brito da Silva

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Giovanna Ofretorio de Oliveira Martin Franchi

Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Handherson Leylton Costa Damasceno

Universidade Federal da Bahia, Brasil

Hebert Elias Lobo Sosa

Universidad de Los Andes, Venezuela

Helciclever Barros da Silva Sales

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Brasil

Helena Azevedo Paulo de Almeida

Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil

Hendy Barbosa Santos

Faculdade de Artes do Paraná, Brasil

Humberto Costa

Universidade Federal do Paraná, Brasil

Igor Alexandre Barcelos Graciano Borges

Universidade de Brasília, Brasil

Inara Antunes Vieira Willerding

Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Jaziel Vasconcelos Dorneles

Universidade de Coimbra, Portugal

Jean Carlos Gonçalves

Universidade Federal do Paraná, Brasil

Joao Adalberto Campato Junior

Universidade Brasil, Brasil

Jocimara Rodrigues de Sousa

Universidade de São Paulo, Brasil

Joelson Alves Onofre

Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil

Jónata Ferreira de Moura

Universidade São Francisco, Brasil

Jonathan Machado Domingues

Universidade Federal de São Paulo, Brasil

Jorge Eschriqui Vieira Pinto

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil

Jorge Luís de Oliveira Pinto Filho

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Juliana de Oliveira Vicentini

Universidade de São Paulo, Brasil

Juliano Milton Kruger

Instituto Federal do Amazonas, Brasil

Juliano Pizzano Ayoub

Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil

Julierme Sebastião Moraes Souza

Universidade Federal de Uberlândia, Brasil

Junior César Ferreira de Castro

Universidade de Brasília, Brasil

Katia Bruginski Mulik

Universidade de São Paulo, Brasil

Laionel Vieira da Silva

Universidade Federal da Paraíba, Brasil

Lauro Sérgio Machado Pereira

Instituto Federal do Norte de Minas Gerais, Brasil

Leonardo Freire Marino

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Leonardo Pinheiro Mozdzenski

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Letícia Cristina Alcântara Rodrigues

Faculdade de Artes do Paraná, Brasil

Lucila Romano Tragtenberg

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Lucimara Rett

Universidade Metodista de São Paulo, Brasil

Luiz Eduardo Neves dos Santos

Universidade Federal do Maranhão, Brasil

Maikel Pons Giralt

Universidade de Santa Cruz do Sul, Brasil

Manoel Augusto Polastrelí Barbosa

Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Marcelo Nicomedes dos Reis Silva Filho

Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil

Márcia Alves da Silva
Universidade Federal de Pelotas, Brasil

Marcio Bernardino Sirino
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Marcos Pereira dos Santos
Universidad Internacional Iberoamericana del Mexico, México

Marcos Uzel Pereira da Silva
Universidade Federal da Bahia, Brasil

Marcus Fernando da Silva Praxedes
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Brasil

Maria Aparecida da Silva Santandel
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

Maria Cristina Giorgi
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Brasil

Maria Edith Maroca de Avelar
Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil

Marina Bezerra da Silva
Instituto Federal do Piauí, Brasil

Marines Rute de Oliveira
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil

Maurício José de Souza Neto
Universidade Federal da Bahia, Brasil

Michele Marcelo Silva Bortolai
Universidade de São Paulo, Brasil

Mônica Tavares Orsini
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Nara Oliveira Salles
Unversidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Neide Araujo Castilho Teno
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brasil

Neli Maria Mengalli
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Patricia Biegging
Universidade de São Paulo, Brasil

Patricia Flavia Mota
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Patrícia Helena dos Santos Carneiro
Unversidade Federal de Rondônia, Brasil

Rainei Rodrigues Jadejiski
Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Raul Inácio Busarello
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Raymundo Carlos Machado Ferreira Filho
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Ricardo Luiz de Bittencourt
Universidade do Extremo Sul Catarinense, Brasil

Roberta Rodrigues Ponciano
Universidade Federal de Ubertândia, Brasil

Robson Teles Gomes
Universidade Católica de Pernambuco, Brasil

Rodiney Marcelo Braga dos Santos
Universidade Federal de Roraima, Brasil

Rodrigo Amancio de Assis
Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil

Rodrigo Sarruge Molina
Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Rogério Rauber
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil

Rosane de Fatima Antunes Obregon
Universidade Federal do Maranhão, Brasil

Samuel André Pompeo
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil

Sebastião Silva Soares
Universidade Federal do Tocantins, Brasil

Silmar José Spinardi Franchi
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Simone Alves de Carvalho
Universidade de São Paulo, Brasil

Simoni Urnau Bonfiglio
Universidade Federal da Paraíba, Brasil

Stela Maris Vaucher Farias
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Tadeu João Ribeiro Baptista
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil

Taíza da Silva Gama
Universidade de São Paulo, Brasil

Tania Micheline Miorando
Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Tarcísio Vanzin
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Tascieli Feltrin
Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Tatiana da Costa Jansen
Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial, Brasil

Tayson Ribeiro Teles
Universidade Federal do Acre, Brasil

Thiago Barbosa Soares
Universidade Federal do Tocantins, Brasil

Thiago Camargo Iwamoto
Universidade Estadual de Goiás, Brasil

Thiago Medeiros Barros
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Tiago Mendes de Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Vanessa de Sales Marruche
Universidade Federal do Amazonas, Brasil

Vanessa Elisabete Raue Rodrigues
Universidade Estadual do Centro Oeste, Brasil

Vania Ribas Ulbricht
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Vinicius da Silva Freitas
Centro Universitário Vale do Cricaré, Brasil

Wellington Furtado Ramos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

Wellton da Silva de Fatima
Instituto Federal de Alagoas, Brasil

Wenis Vargas de Carvalho
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

Yan Masetto Nicolai
Universidade Federal de São Carlos, Brasil

PARECERISTAS E REVISORES(AS) POR PARES

Avaliadores e avaliadoras Ad-Hoc

Alcidinei Dias Alves
Logos University International, Estados Unidos

Alessandra Figueiró Thornton
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

Alexandre João Appio
Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Brasil

Artur Pires de Camargos Júnior
Universidade do Vale do Sapucaí, Brasil

Bianka de Abreu Severo
Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Carlos Eduardo B. Alves
Universidade Federal do Agreste de Pernambuco, Brasil

Carlos Eduardo Damian Leite
Universidade de São Paulo, Brasil

Catarina Prestes de Carvalho
Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Brasil

Davi Fernandes Costa
Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, Brasil

Denilson Marques dos Santos
Universidade do Estado do Pará, Brasil

Domingos Aparecido dos Reis
Must University, Estados Unidos

Edson Vieira da Silva de Camargos
Logos University International, Estados Unidos

Edwins de Moura Ramires
Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial, Brasil

Elisiene Borges Leal
Universidade Federal do Piauí, Brasil

Elizabete de Paula Pacheco
Universidade Federal de Ubertândia, Brasil

Elton Simomukay
Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil

Francisco Geová Goveia Silva Júnior
Universidade Potiguar, Brasil

Indiamaris Pereira
Universidade do Vale do Itajaí, Brasil

Jacqueline de Castro Rimá
Universidade Federal da Paraíba, Brasil

Jonas Lacchini
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Brasil

Lucimar Romeu Fernandes
Instituto Politécnico de Bragança, Brasil

Marcos de Souza Machado
Universidade Federal da Bahia, Brasil

Michele de Oliveira Sampaio
Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Nívea Consuelo Carvalho dos Santos
Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial, Brasil

Pedro Augusto Paula do Carmo
Universidade Paulista, Brasil

Rayner do Nascimento Souza
Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial, Brasil

Samara Castro da Silva
Universidade de Caxias do Sul, Brasil

Sidney Pereira Da Silva
Stockholm University, Suécia

Suêlen Rodrigues de Freitas Costa
Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

Thais Karina Souza do Nascimento
Instituto de Ciências das Artes, Brasil

Viviane Gil da Silva Oliveira
Universidade Federal do Amazonas, Brasil

Walmir Fernandes Pereira
Miami University of Science and Technology, Estados Unidos

Weyber Rodrigues de Souza
Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Brasil

William Roslindo Paranhos
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Parecer e revisão por pares

Os textos que compõem esta obra foram submetidos para avaliação do Conselho Editorial da Pimenta Cultural, bem como revisados por pares, sendo indicados para a publicação.



A primeira edição – impressa – desse livro foi feita pela Editora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Edur), em 2004, com exemplares esgotados. Os direitos para essa edição foram cedidos pelo Gepem.

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
Instituto de Educação – UFRRJ / DTPE, Sala 30
Rodovia BR 465, Km 7
CEP: 23890-000
Seropédica - RJ



Dedicatória

*Aos nossos pais, Manoel
e Esperança (In memoriam),*

*Amilson (In memoriam) e
Maria Amélia, pelo amor e pela
cumplicidade, sentimentos que
não se materializam em um livro,
mas que nos renovam e nos dão
força e inspiração para trabalhar
em prol de uma educação melhor
para todas as pessoas.*

SUMÁRIO

Prefácio12

Apresentação14

CAPÍTULO 1

A fração:
conceituação, significados e implicações curriculares 16

CAPÍTULO 2

**Equivalência, reta numérica,
comparações e estimativas.....33**

CAPÍTULO 3

**Frações através de jogos
e atividades manipulativas variadas53**

Considerações Finais

Os alunos aprendem numa proposta pedagógica séria
com jogos e atividades manipulativas..... 222

Posfácio 225

Referências.....227

Sobre os autores 230

Índice remissivo 231

PREFÁCIO

Nas últimas décadas do século XX pudemos observar um crescimento nas pesquisas em Educação Matemática e consequentemente um aumento nas propostas de reformas do ensino de matemática, no Brasil e no mundo, que impactam o século XXI. Dentre elas, algumas se referem ao ensino dos números racionais e em particular ao ensino das frações. Tais reformas se instalam no âmbito da sala de aula e têm como agente inovador o professor, figura fundamental que, no entanto, é por vezes esquecida por aqueles que propõem as reformas. Em geral, tanto na formação inicial quanto em cursos de extensão, é difícil encontrar material que pense a sala de aula de matemática a partir da matemática a ser ensinada e aprendida. Ora encontramos uma preocupação excessiva com a sintaxe matemática, que nem sempre tem a ver com o rigor matemático nem com a prática do professor, ora a ênfase recai sobre métodos de ensino, e a matemática passa ao longe como se um determinado método funcionasse para qualquer conteúdo por si só.

Este livro se destaca no cenário de seus congêneres por apresentar alternativas de atividades e jogos para o trabalho com as frações no Ensino Fundamental. Não é mais um livro com atividades interessantes, é, sobretudo, uma leitura agradável e com um rigor desejado que muitas vezes não é encontrado em livros para o magistério ou licenciatura.

Os programas de cursos de magistério – Curso Normal – e de pedagogia oferecem pouco espaço para uma discussão mais aprofundada sobre os fundamentos matemáticos e/ou sobre a aprendizagem de frações. Nos cursos de licenciatura, ele acontece, mas o estudo dos números racionais tão pouco ganha a ênfase necessária para instrumentar o professor para e na sala de aula. Aqui, entretanto,

em cada capítulo o leitor descobre que o livro vai além dos jogos e atividades, ele nos coloca perante a desafios e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de frações.

Giménez e Bairral são educadores matemáticos comprometidos com a sala de aula. Portanto, o foco e resultados de suas pesquisas evidenciam tal envolvimento, e este livro não poderia deixar de nos deliciar com fundamentações e aplicações para o trabalho com frações nos diferentes níveis de ensino. Pesquisadores e agentes de políticas educacionais também encontram aqui material rico para embasar novas pesquisas e propostas.

É com muita satisfação que prefacio este livro, pois conheci Joaquin Giménez em 1996 quando ministrou um curso sobre números racionais no Rio de Janeiro, no qual apresentou e discutiu várias destas atividades. Este livro é aguardado desde então. A parceria com Marcelo Bairral acrescenta o olhar para a sala de aula brasileira. Enfim, temos o prazer de ler e trabalhar com um livro que valoriza a Educação Matemática por seu rigor, maturidade, técnica e fundamentação, mantendo a seriedade, o encanto e o prazer de fazer matemática escolar.

Janete Bolite Frant
UFRJ

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Neste livro, disponibilizamos aos professores e futuros educadores um conjunto de materiais de apoio fundamentalmente gráfico – ainda que de natureza manipulativa – para o ensino sistemático das frações.

Até o momento, divulgamos o material através de cursos, publicações e encontros diversos, e muitos professores interessados em renovar e inovar o ensino da matemática já têm aplicado este material em diversas situações escolares. As ideias principais dos jogos e das atividades aqui apresentadas foram iniciadas em 1978 pelo grupo “Periódica Pura”, em Barcelona. No Brasil, em 1994 foi desenvolvida uma primeira edição deste material e que foi posteriormente traduzida por Paulo Henrique Colonese.

A presente edição sofreu algumas modificações em função das experiências que continuamos desenvolvendo em diferentes espaços de formação profissional docente. A pesquisa foi desenvolvida em turmas de 3a a 8a série do Ensino Fundamental (atualmente do 4º ao 9º ano) e resultou na tese de doutorado em Educação Matemática (Giménez, 1991) apresentada na Universidade Autônoma de Barcelona (Espanha). Apesar de estudos posteriores terem enfatizado que as frações estabelecem relações conceituais importantes na construção numérica, no currículo atual, o seu ensino pouco tem se associado à introdução das ideias algébricas e funcionais.

Sabemos que a introdução do conceito e o primeiro contato dos estudantes com as frações devem partir de material de uso comum, não estruturado (água, balanças, dobraduras etc.). Assim, os materiais, suas conseqüentes propostas de utilização e desdobramentos foram elaborados em função de uma linha didática que

procura enriquecer a atividade – vivência – matemática dos alunos com diversos tipos de experiências, objetivando que relacioná-los com as vivências dos estudantes e com outros campos de conhecimento. Com esse espírito, o leitor encontrará subsídios teóricos nos dois primeiros capítulos da obra; e no terceiro, sugestões de caráter mais prático.

Nas tarefas propostas, estabelecem-se situações de cálculo que partem da intuição sensorial para possibilitar aos alunos raciocinarem por si mesmos, experimentarem, investigarem, criarem e se divertirem com os instrumentos cognitivos que vão adquirindo. Antes de tudo é preciso assinalar que o material gráfico e visual apresentado no capítulo 3 é de aplicação em determinados aspectos e momentos da aprendizagem das frações e não cobre todo o desenvolvimento desse conteúdo. Outros estudos correlatos enriquecem a nossa obra, como Souza (2021), Souza e Powell (2025), Powell e Souza (2024), e Santos e Rezende (1996).

Finalizando, agradecemos ao Paulo H. Colonese pela tradução de parte do material, à Rosana de Oliveira e Lúcia Villela por algumas aplicações do material, e a Roberto R. Baldino, Antonio José Lopes (Bigode), Vânia Santos-Wagner, Dora Soraia Kindel, Isabel Batile, Carme Burgués e Josep Partegás pelos valiosos comentários sobre a temática. Da mesma forma, agradecemos à Secretaria de Educação Superior (MEC/Brasil) por subsidiar, através do PROEXT 2004, a primeira edição desta publicação. Para a presente edição agradecemos ao Gepem e à UFRRJ pela parceria.

Joaquín Giménez, Barcelona

Marcelo Bairral, Rio de Janeiro



1

A FRAÇÃO: CONCEITUAÇÃO, SIGNIFICADOS E IMPLICAÇÕES CURRICULARES

“Ao ler os PCN pude perceber que existe uma interpretação que atribui à fração um significado de operador, ou seja, quando desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e modifica” Aline

Há um certo tempo, era comum os professores classificarem os conceitos matemáticos em dois grupos: fáceis e difíceis. Dentre os fáceis, ou melhor, mais frequentes, em nosso cotidiano, temos as frações. Associada a essa “ideia de funcionalidade”, que perdurou longos anos, havia aquela de que fração era um conteúdo curricular de simples compreensão e, por isso, deveria ser trabalhado, prioritariamente, no Ensino Fundamental.

Não compactuamos com a ideia anterior, e, a título de exemplo, o leitor poderá ver o mapa seguinte e identificar concepções “iniciais” sobre o que representam as frações para uma estudante de licenciatura em matemática (20 anos de idade).

Figura 1



Observando o esquema (Figura 1), percebemos um conhecimento bem restrito e com conexões aparentemente pouco claras sobre as frações. E, perguntando a outros estudantes da turma, as respostas não diferem muito:

“um número que indica que temos de dividir uma unidade em um certo número de partes (denominador), das quais consideramos algumas (numerador).”

Continuando com a conversa e provocando outra resposta, um licenciando complementa:

"a fração também é o resultado de uma divisão, é um decimal... ou... não sei... todos os decimais..."

No entanto, após um trabalho construtivo sobre as frações no currículo escolar, a licencianda do esquema anterior apresenta elementos de seu conhecimento profissional que foram reconstruídos a partir da dinâmica. Ficou evidente, considerando o seu próprio processo de aprendizagem, que a ideia da facilidade das frações foi abandonada pela futura professora.

"Quando começaram essas aulas de frações, eu particularmente pensei que não fossem me acrescentar muito, pois achava esse conteúdo banal e pensei que o dominava totalmente. No decorrer das aulas, vi que estava redondamente enganada, e mais, vi que não é tão fácil assim lecionar este conteúdo. Acho que essa foi minha grande descoberta. [...] Com relação às descobertas, uma delas foi o fato de que não precisamos 'forçar' nossos alunos a aprender o MMC, como se fosse o único meio para resolver a soma e a subtração de frações [...]."

No ensino-aprendizagem dos números fracionários, nossos alunos dizem tranquilamente que $7/5$ é uma fração. No entanto, eles realmente aceitam que a fração é um número? A seguir, descreveremos com mais detalhes esse processo.

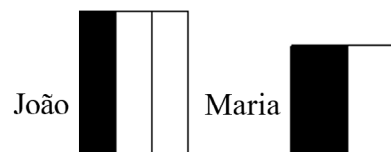
A FRAÇÃO-NÚMERO E A UNIDADE

Existem três concepções errôneas comumente apresentadas pelos estudantes sobre as frações, a saber: (a) a fração é uma parte menor da unidade; (b) são dois números separados por um traço; e (c) a fração é um operador que sempre indica uma subdivisão e, portanto, um resultado menor.

Começemos com a primeira concepção. Quando se associa a fração a uma parte de uma figura, ficamos induzidos a “pensar” que as frações são partes, pois sabemos que a parte é menor que o todo. Se dissermos que $7/5$ é uma fração, parece que estamos em uma contradição, pois, se “as frações servem para indicar coisas menores que a unidade”, torna-se difícil aceitar que essa fração é **um número**, ficando mais fácil admitir que são dois (Kerslake, 1986).

- Ao interpretarmos os dois termos (numerador e denominador) com a típica ideia “*partes que consideramos / partes em que subdividimos a unidade*”, estamos nos reportando à história. Por exemplo, quando três pessoas têm que repartir duas pizzas entre elas, é comum que façam: cada uma fica com a metade e repartem o restante entre as três. Assim, cada uma fica com $1/2 + 1/6$, não percebendo que essa quantidade total foi $2/3$. Esse procedimento natural de resultar uma subdivisão era comumente feito pelos egípcios.
- A insistência na subdivisão faz com que o sujeito não reconheça que a referência fracionária depende fundamentalmente do valor unitário. Por isso, é importante falar de situação inicial, operador fracionário e situação final – sendo essa relação reversível através de frações inversas. Ou seja, A é $3/5$ de B, e B é $5/3$ de A. Por exemplo, quando sabemos que $3/4$ de determinada quantidade são 12, para encontrar a quantidade inicial, muitos alunos calculam $3/4$ de 12. A unidade pode ser elemento de chegada e não apenas de partida. E, juntamente a essa dificuldade, muitos estudantes mantêm a ideia de que a fração é sempre menor que a unidade.

Figura 2

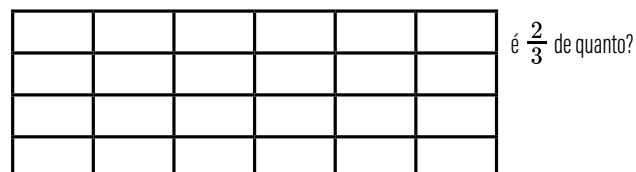


Observem a Figura 2. A pergunta feita aos alunos do 9º ano (13-14 anos) foi: “*quem comeu a maior parte do bolo, João ou Maria?*”. Baseando-se visualmente apenas no pedaço correspondente, uns 25% dos alunos responderam que João comeu mais porque o pedaço era maior. Como se vê, nesse tipo de raciocínio, os alunos desprezaram a diferença de unidade, não a considerando como ponto de referência para resolver a situação proposta.

UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA IMPRESCINDÍVEL: VALORIZAR A UNIDADE

A unidade é algo que não fica explicitado. O denominador, ou seja, o termo que denomina (o que dá o nome), se refere à unidade porque a constrói, a recupera. Por exemplo, um quarto é algo que se repete quatro vezes para reconstruir a unidade. Por isso, é importante apresentar situações nas quais devemos construir e reconstruir a unidade. Veja alguns exemplos.

Figura 3



Com a Figura 3, podemos exemplificar uma situação: “descobrir a quantidade de doce que havia.” Se dissermos que sobrou a metade do que havia as pessoas não terão dificuldade em responder. No entanto, se resta uma terça parte, quantos foram comidos? Isso equivale dizer que foram comidas duas terças partes. Quanto havia? Com base nesse tipo de situação podemos pensar: *por que só trabalhamos frações de figuras regulares (“certinhas”)?* Qual seria a metade da forma da Figura 4a (à esquerda)? Ou, na Figura 4b (à direita), utilizar figuras regulares como partes: se a peça hexagonal é $\frac{2}{3}$, quanto é a unidade?

Figura 4a

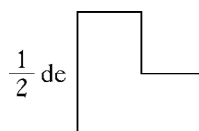
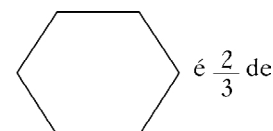


Figura 4b



A unidade deve ser mudada para evidenciarmos a variação da fração e, assim, analisarmos com mais cautela o que se pergunta. Outras situações de equivalência com uma simples “mudança de unidade”: se três bolas forem a unidade, oito peças quantas serão (Figura 5a)? Ou, uma situação equivalente de comparação de peças de um Tangram (Figura 5b).

Quantos grupos de três? Quantas peças A cabem na B?

Figura 5a

Quantos grupos de três?

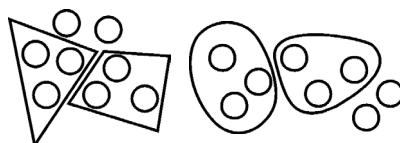


Figura 5b

Quantas peças A cabem na B?



Observem que esse tipo de planejamento não tem sentido isoladamente, uma vez que perguntas como essas devem surgir de um trabalho contextualizado e ampliado a outras situações, isto é, a ideia/periodicidade das estações do ano, as relações espaço-tempo etc. Integrar a reflexão proporcional ao conhecimento do mundo que nos envolve, também é importante. Por exemplo, *é possível que a sombra de um objeto seja maior que o mesmo? Em que situação poderia acontecer? Por quê?*

AS PARTES IGUAIS

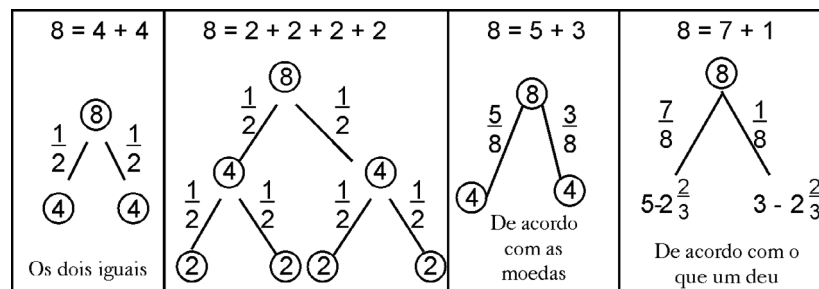
“Temos duas pizzas para repartir igualmente entre três pessoas. Desenhe a situação e pinte a quantidade que cada um deve comer”. Veja alguns procedimentos adotados por um grupo de alunos de 13-14 anos (Giménez, 1989).

- a. Identificação direta e correta da situação através do hachurado, ou com símbolos, ou através da subdivisão em terços.
- b. Identificação correta das partes, imaginando a realidade e deixando todo o rastro da repartição de cada unidade. Reparte pedaços como se fossem seis ao todo e cada um fica com dois.
- c. Identificação correta da parte através de repartição aditiva (realista).
- d. Deixa rastro de toda a repartição, porém não identifica a parte que corresponde a cada um. Em alguns casos, descreve-se de forma aditiva, e em outros, a repartição está incorreta.
- e. Busca associação direta ao resultado, porém apresenta uma partição insegura.

- f. Prescinde do que se reparte.
- g. Não identifica corretamente as partes, buscando fazer uma repartição aditiva.
- h. Faz uma contagem incorreta.

Com essas estratégias, podemos perceber uma diversidade de concepções, algumas evidenciando a dificuldade em aceitar e integrar que, matematicamente, a fração expressa partes iguais. Um outro exemplo pode ser o problema das moedas (Alsina *et al.*, 1992): “um rei chamou dois de seus súbitos e perguntou-lhes o que tinham para comer. Um lhe respondeu: *eu tenho três pães*; e o segundo, *eu tenho cinco*. O rei lhes sugeriu que repartissem, deixoulhes 8 moedas de recompensa e se foi. O súbito que tinha 3 pães disse: *poderíamos repartir em partes iguais*. O outro não concordou, pois não considerava justo, uma vez que havia colocado 5 pães, portanto, deveria ser 5 para ele e 3 para o primeiro. Como resolver a situação da forma mais justa?

Figura 8



Como mostra a Figura 8, há várias maneiras de repartir oito em duas quantidades, de modo que cada repartição corresponde a uma nova unidade de referência: partes iguais, um terço e dois terços etc. É importante notar que a “repartição em partes desiguais” está associada a uma distribuição em partes iguais onde as frações não são as mesmas, ou seja, não são unitárias.

ANÁLISE DIDÁTICA: COTIDIANO, REPRESENTAÇÕES E ASPECTOS

Em nosso cotidiano, a linguagem nos oferece uma primeira ideia das dificuldades sobre o tema, uma vez que há uma variedade de situações que, frequente e diferentemente, falam das frações. Há anúncios publicitários que não são interpretados pelos alunos como fração. Por exemplo, as liquidações cujo desconto não é indicado como porcentagem, mas como relação, ou seja, “pagar dois e levar três”, o que significa um desconto aproximado de 33%. Assim, são diferentes os aspectos da fração, que não estão associados apenas à ideia de parte-todo e que devem ser objeto de exploração e desenvolvimento pela prática docente (Giménez, 1991): fração como quantidade, como expressão de um escalar ou medida, função, símbolo ou como probabilidade.

1. FRAÇÃO COMO QUANTIDADE

A primeira ideia de fração é a distribuição de uma quantidade que se poderia também chamar “fração como expressão de uma partição no sentido geral”. Caracteriza qualquer tipo de situação de repartição de uma coleção de objetos em um certo número de partes, com a conseguinte designação do que corresponde a cada uma. Traz consigo a identificação do resto da divisão como parte do divisor.

1.1. Que se considera parte de uma unidade

- Cada uma das partes iguais em que consideramos partida a unidade (ideia de denominador e fração unitária). Por exemplo: $1/3$.

Adotamos o uso da barra inclinada na escrita das frações por comodidade tipográfica. É aconselhável a escrita usual da fração com a linha horizontal.

- Parte de uma unidade que consiste em um agrupamento de partes iguais do tipo anterior (ideia de numerador e a chamada “fração ordinária”). Por exemplo, $2/3$.
- Forma de representação de uma situação, quando, em lugar de usar a unidade, tomamos uma de suas subdivisões (ideia de fração imprópria e fração em geral). Possui, em geral, duas formas de expressão:

Integral com o denominador escolhido. Exemplo: $8/3$. Forma mista. Exemplo: 2 e $2/3$.

1.2. Fração de uma coleção de elementos considerada em conjunto como unidade ou totalidade

Apenas são possíveis os denominadores que sejam divisores exatos do número da coleção.

- Forma de representar, como parte do total, o resultado de dividir uma coleção de objetos em um número de partes iguais. Por exemplo: 72 caramelos repartidos em 4 saquinhos de 18 caramelos cada dão $1/4$ dos caramelos para cada saquinho.
- Parte formada pela reunião de uma ou mais das partes iguais em que tenhamos dividido a coleção. Por exemplo: 54 caramelos dos anteriores, ou seja, 3 saquinhos, são $3/4$ do total.

2. FRAÇÃO COMO EXPRESSÃO DE UM ESCALAR OU MEDIDA

Atribui-se às situações em que a fração é utilizada explicitamente para designar medidas ou processos de medição. Por exemplo: o corredor conseguiu fazer o percurso em $9/10$ s.

Corresponde também às situações de comensurabilidade mediante estratégias de agrupamento, e parece implicar a aquisição de um raciocínio proporcional. Sugere a obtenção de um par ordenado como modo de representação. Nem sempre a ordem do par coincide com a expressão usual. Por exemplo: 3 barras verdes correspondem a 2 barras vermelhas. Ou seja, a barra verde é $\frac{2}{3}$ da barra vermelha.

A visão *escalar* está associada a grandezas de todo o tipo, não apenas com a expressão da quantidade em si, mas com a expressão da relação com uma unidade de medida, seja essa convencional ou não. Assim, repartir 1 m de fita em tiras de 5 cm, leva-nos a pensar sobre o que representa cada pedaço com relação ao total ($\frac{1}{20}$), isso indicaria uma quantidade. No entanto, falar de $\frac{1}{20}$ m, significa pensar na expressão de uma medida, ou seja, de cada pedaço.

A fração relacional se associa a dois tipos de situações que podem envolver duas situações similares ou não. No primeiro caso, podemos falar de fração-escala 1:30000 (que expressa a relação desenho-realidade), na qual se comparam comprimentos, ou no caso da inclinação de 15% de uma rampa (em que se diz que, para cada 100 m na horizontal, sobe-se 15 m na vertical), ou ainda, no caso das liquidações, em situações do tipo “pague 3 e leve 4”. Nesse último caso, está evidente que nem sempre a fração é expressa com dois números separados por um traço. Por outro lado, uma fração pode não relacionar as mesmas grandezas. É o caso, por exemplo, dos fatores de conversão, os índices ou taxas de variação (como a velocidade, a pressão etc.). Em outro tipo de situações, na construção de colares, por exemplo, “para cada 4 contas amarelas coloco 7 azuis”, as frações expressam relação de proporcionalidade.

3. FRAÇÃO COMO FUNÇÃO

Este aspecto indica a fração como **relação** entre duas coleções de objetos ou realidades.

Podemos identificar usualmente dois tipos de situações:

- **Como expressão de uma comparação simples**

Forma de expressar a relação entre duas partes distintas de um todo, ou coleções claramente definidas. O caso mais frequente é o das misturas. Por exemplo: Na mesa, as fichas brancas representam o dobro das pretas. Ou seja, supondo que só houvesse fichas brancas e pretas, $1/3$ são pretas e $2/3$ são brancas.

- **Como operador que “transforma” uma quantidade em outra**

Surgem da matematização de situações de intercâmbio, reduções, ampliações etc. Por exemplo: 3 de cada 10, 5 para cada 4. Obteve 25% de desconto, ou seja, a cada 100, paguei 75.

As quantidades podem ser do mesmo tipo ou de tipos diferentes. Um exemplo desses últimos são os chamados “fatores de proporção” ou constante de proporcionalidade: 25 reais por cada quilograma.

4. FRAÇÃO COMO SÍMBOLO

- **Frações como par ordenado**

Podem surgir de situações de qualquer tipo citado anteriormente, estabelecendo-se um significado distinto aos dois elementos do par. Corresponde a uma explicitação ou supressão das medidas que são descritas. Por exemplo: (3, 5) indicando que se 3 barras medem sequencialmente 5 mm de largura, cada barra mede $3/5$ mm na formulação usual.

- **Equivalência como diversidade de representações de uma mesma realidade** Por exemplo: $3/5 \sim 6/10$

Ela permite descrever a situação mediante a fração equivalente que seja mais cômoda. Caso particular, a porcentagem (%). Outra consequência é o conhecimento da não equivalência, a qual indica que uma fração expressa algo maior ou menor do que outra (ordenação).

- **Inverso ou inversão de uma fração**

Observação do fato de que um par de números possui significação diferente segundo a sua ordem. Descoberta posterior da reversibilidade do processo na relação segundo a interpretação. Ou seja, parte ----> todo; todo ----> parte. Por exemplo, se 5 é a metade, o total é o dobro de 5.

Medida de A em relação a B, de B em relação a A. Comparação de A com B, comparação de B com A. Operador; operador inverso: vezes $3/4$; vezes $4/3$.

- **Fração como quociente de dois números naturais**

As situações de repartição, geralmente representadas usualmente pela divisão e também por fração, passam por um processo de abstração que permite a sua aplicação a outras situações. Então, surgem a utilização de decimais como forma de representação equivalente às frações, o que possibilita a mudança de representações que leva a falarmos em frações decimais e periódicas. Também se destaca o problema da utilização da fração como aproximação. Por exemplo: ter um desconto de 33% é como pagar aproximadamente $2/3$ do valor.

- **Fração como operador numérico**

A expressão de uma proporcionalidade direta ou função linear envolve o uso indiscriminado das representações funcionais usuais (tabela de valores, representações em coordenadas etc.), assim como da multiplicação de frações. Esse processo implica na utilização (consciente ou não) de um raciocínio multiplicativo.

- **Fração como expressão de uma medida**

Consiste no reconhecimento do uso indiscriminado de qualquer representação fracionária para medidas. Nesse aspecto, a compreensão da ideia de produto como superfície nos números naturais é “associada” ao produto de frações.

- **Fração como resultado de uma equação linear do tipo: $ax = b$ ($a \neq 0$)**

Por exemplo: a solução de $4x = 3$ é $x = 3/4$.

5. FRAÇÃO COMO PROBABILIDADE

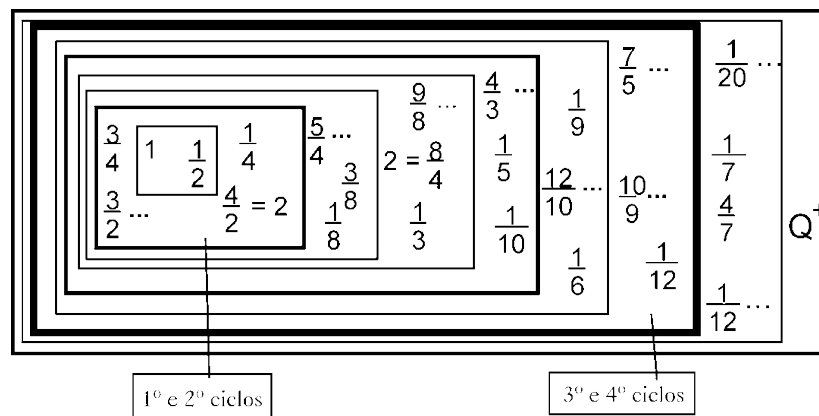
A fração probabilidade é um caso misto em que se expressa uma relação ou uma determinada quantidade. Por exemplo, num jogo de roleta com dois jogadores, cada um tem a metade das possibilidades de ganhar.

IMPLICAÇÕES CURRICULARES

A construção do conceito irá acontecendo à medida que o professor desenvolva uma variedade de situações: com decimais, proporções, porcentagens, ampliação do sistema de numeração etc.

Assim, um trabalho contínuo e progressivo (Figura 9), ao longo do Ensino Fundamental, possibilitará ampliar os significados das frações. Nem todas as frações são iguais.

Figura 9



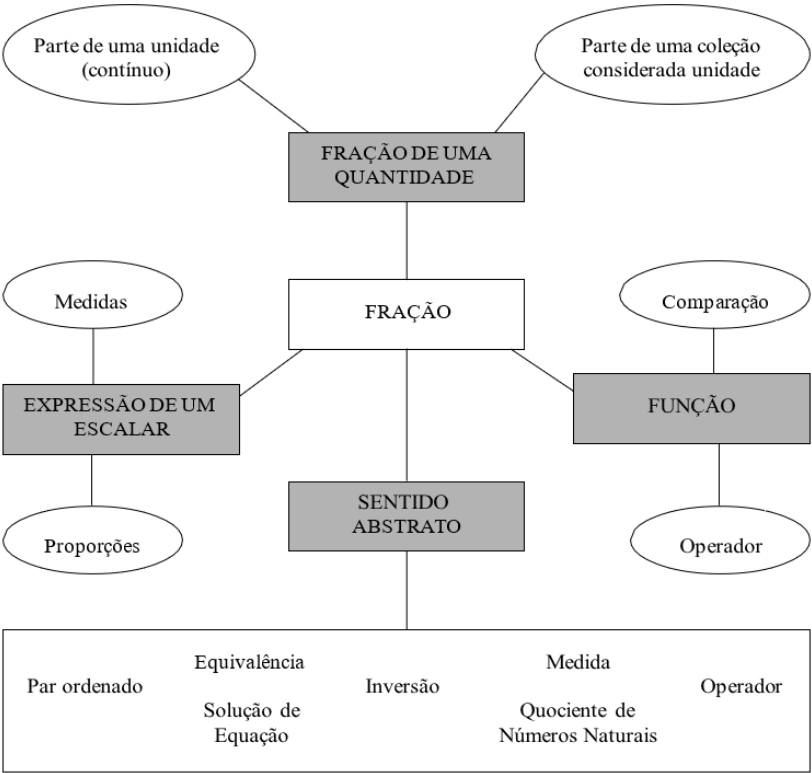
A ampliação sucessiva do uso das frações no currículo não pode ser contemplada apenas com a inclusão abstrata desse conjunto em outros. É imprescindível uma abordagem que parta das noções mais simples às mais complexas. Dessa forma, os diversos aspectos das frações podem ser explorados ciclicamente: com resultados de partições variadas, repetição de processos de medida, comparações, ampliações ou reduções etc. O professor poderá utilizar também instrumentos novos e ferramentas didáticas apropriadas ao grupo de frações que se está trabalhando, do mesmo modo que fazia com os naturais. Com esse espírito, ressaltamos uma sequência de conteúdos conceituais, que contemplam as diversas ideias das frações e que preconizam um processo contínuo de ampliação do conjunto, a saber:

- Metades, dobros, utilização de unidades de medida diversas e uso da representação linear.

- Contar metades, terços, quartos etc. em situações variadas de medida. Mudança de unidades. Representações equivalentes.
- As partes iguais. Subdivisões. Equivalências gráficas.
- Relações de proximidade e localização onde aparecem meios, quartos, oitavos etc. Outras manipulações proporcionais.
- Estudo de situações de aplicação de frações em quantidades discretas. Busca pela unidade, a fração ou "a parte".
- Situações de mistura: colares coloridos, café com leite, e outros casos de receitas culinárias.
- Partições simples da unidade. Subdivisão progressiva em 3, 5 e 9 partes, em parte de partes etc.
- Operadores não exatos. Significação do resto da divisão.
- Relações fracionárias simples, no caso de superfícies. Fração como medida.
- Experiências fracionárias com a medida. Aproximações decimais. Fração e decimal.
- Reflexão sobre relações equivalência-proporção.
- Significado globalizador. Percentagens. Gráficos.

Finalizando, com o esquema da Figura 10, sintetizamos o que apresentamos nesse capítulo sobre o que deve ser objeto de atenção curricular pelos professores.

Figura 10





2

**EQUIVALÊNCIA,
RETA NUMÉRICA,
COMPARAÇÕES
E ESTIMATIVAS**

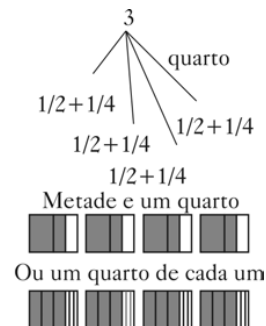
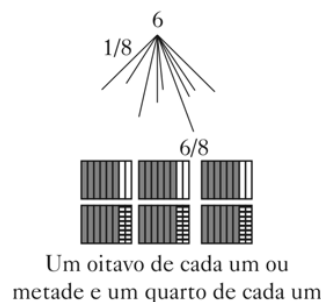
“Seria importante que o aluno aprendesse a diferenciar números naturais e racionais desde cedo, uma vez que as escolas distanciam bastante esses conceitos, e o aluno acaba levando um choque, principalmente quando precisa ter uma percepção sobre infinidade.” Jéssica

A equivalência, como um dos aspectos que constrói a noção de fração e número racional, deve ser explorada em situações variadas. Quando a equivalência é considerada como pura definição, desprovida de significado, não proporciona avanço conceitual e, inclusive, não é reconhecida pelo aluno (Giménez, 1989). A ordenação e a equivalência são elementos conceituais importantes que, juntamente com o auxílio do material manipulativo e do resgate histórico, constituem elementos curriculares favoráveis à aprendizagem.

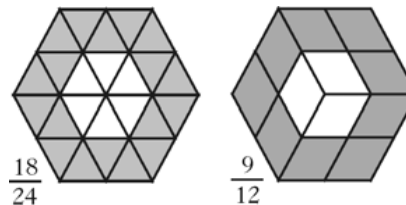
A EQUIVALÊNCIA

A primeira ideia para trabalhar a equivalência são as distribuições. Uma vez descoberto que as partes em que se divide o todo devem ser iguais, o processo de partição leva à elaboração de respostas distintas.

Os alunos podem dar significado às partições em termos de equivalência. Por exemplo, é imediato perceber que repartir 6 entre 8 é a mesma coisa que repartir 3 entre 4. Fazendo metades dá $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ (sobre 8). Formando grupos de 2 dá 3 (sobre 4), e formando outros grupos de 2, daria um e meio (sobre 2). Fazendo 4 partes de cada um dos três, temos doze pedaços e, então, 4 para cada um. E, se fizéssemos 8 partes de cada unidade, são um total de 24, então, entre 4, seriam 6. Veja a ilustração.



Este tipo de pensamento possibilita interpretar o processo natural que irá permitir resolver situações mais complexas. Portanto, identificar quanto é 18 sobre 24, permite indicar que as *metades* são 9 (sobre 12), *um terço* é 3 (sobre 4) e as *novas metades* são, sucessivamente, $1\frac{1}{2}$ (sobre 2), $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ (sobre 1). Daí, o resultado é o que correspondia à unidade, e os passos intermediários fornecem situações equivalentes em termos de uma “mudança de denominação”.

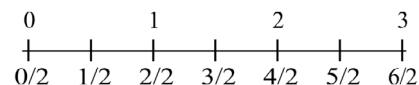


Por outra parte, a forma das partes correspondentes a uma partição pode ter ou possuir várias representações. Daí a necessidade de oferecer um esquema unificador, pois, em situações do tipo *repartir 5 pizzas entre 8 pessoas*, é comum os estudantes darem a resposta $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Desse modo, é bom lembrar que esses quartos e oitavos podem ocupar diversas posições, o que muitas vezes é pouco explorado pelos professores.

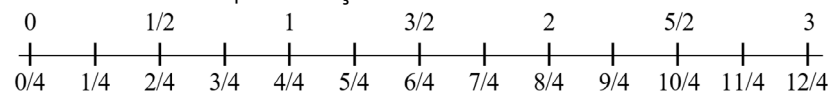
Em cada uma das situações anteriores, não se deve esquecer da análise crítica sobre o “mais justo” na repartição obtida em cada caso. A mudança de denominação é uma alteração que chamamos denominador. Porém, dependendo da série (ano), convém não comentarmos isso com os alunos.

A RETA NUMÉRICA E A EQUIVALÊNCIA

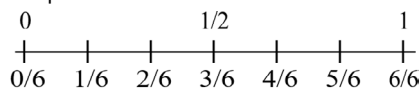
O uso da representação na reta numérica é muito poderoso para o reconhecimento da equivalência e contribui para melhorar o conhecimento formal de fração. Se os alunos costumam representar a situação $1/2$ como a colocação de um "ponto médio" entre 1 e 2 e não só uma posição intermediária qualquer, eles percebem imediatamente que podem contar tantos meios quanto quiserem, $1/2$, $2/2$, $3/2$, $4/2$. As observações de recontagem com objetos reais (frutas etc.) permitem reconhecer que duas metades de maçãs equivalem a uma maçã inteira, que quatro metades são como duas etc. Assim, representa-se, na reta das unidades, uma nova linha com as metades:



Para novas experiências, os alunos reconhecem quartos e estabelecem relações: $1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2$. Dessas relações se deduzem novas representações na reta:



Mais tarde se estabelecerá uma relação com terços. A partir dessa se reconhecerá que $1/2 > 1/3$ e que $6/3 = 4/2 = 8/4$ etc. Posteriormente com sextos, e estabeleceremos que $2/6 = 1/3$ e $3/6 = 1/2 = 4/8$ etc. Essas representações se situarão em pontos correspondentes, notando agora que representações equivalentes estão situadas no mesmo ponto.



A EQUIVALÊNCIA EM OUTRAS SITUAÇÕES

Nos casos de usar situações do “tipo razão ou proporção”, como na elaboração de colares de duas cores diferentes (3 amarelas e 4 verdes), a expressão da relação em forma de tabela nos dá uma referência explícita da equivalência.

Amarelo	3	6	9	12
Verde	4	8	12	16

Em situações de ampliação e redução, usa-se papel quadriculado, fotocópias etc. e mostram-se relações que podem ser comparadas mediante a situação final com a situação inicial. Este tipo de comparação, apesar de extremamente significativa, pode perder o sentido caso o significado da razão não seja ressaltado.

No caso do suco concentrado de laranja com água, (4, 5) é equivalente a (8, 10), pois possui o mesmo sabor. No caso do intercâmbio de 2 figurinhas por 3 balas (2, 3), existem alunos que não percebem que essa situação é equivalente a (4, 6), pois acham que precisam apenas de mais figurinhas para o intercâmbio. Nessa situação, continuam válidas as comparações com um ponto coincidente. Tal como o caso de (2, 5) e (2, 7). Cada situação deve ser reforçada para ter um significado.

Com isso, queremos dizer que nem sempre é possível realizar transferências entre situações. Dependendo de cada uma, vamos reconhecer propriedades ou construtos diferentes. A equivalência também apresenta aspectos conceituais diferentes, por exemplo.

1. Equivalência como pseudônimos. Quando propomos a um estudante de 8-9 anos a elaboração de um trabalho sobre a fração $\frac{3}{4}$ (Streefland, 1992), ele procura representações múltiplas em forma de adição ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$), em forma de subtração ($1 - \frac{1}{4}$), e em situações como ($\frac{2}{8} + \frac{2}{4}$), ($\frac{2}{2} \times \frac{2}{8}$) etc.

Todas essas situações são “nomes” diferentes para a mesma fração. Nós as chamamos de pseudônimos, e essa variedade de respostas mostra o desenvolvimento do conhecimento dos alunos, adquirido quando desenvolvem diversas situações de partições, observações na reta numérica, somas etc.

2. Equivalência como mudança de representação. A equivalência é reforçada em situações de jogos como bingos em superfícies contínuas e dominós de identificação simbólica. As frações egípcias significam também outra representação alternativa que pode vir a ser usada.

OBSERVANDO A CONSTRUÇÃO: ESTRUTURA COMPARATIVA E ADITIVA

A comparação de frações, ao destacar princípios simbólicos, põe de manifesto a ausência da construção da ideia matemática. De fato, dizer que $3/5 > 1/2$, pois o primeiro é 0,6; e o segundo, 0,5, é uma mecanização do processo e pode levar aos fracassos já citados. Observemos outro raciocínio de uma criança de 9 anos:

“ $1/2$ é maior que $1/3$, logo $2/4$ é maior que $2/6$ e, sendo $1/2$ como $3/6$, então, $1/2$ é $1/6$ maior que $1/3$ ”

Este tipo de raciocínio é comum. Ou seja, a ideia de que alguma coisa A é maior do que outra B, se existir algo G ($1/6$) que somado com B ($1/3$) dá A ($1/2$). Assim, é possível reconhecer a equivalência quando tivermos $G=0$.

O modelo de pensamento recursivo de Kieren e Pirie (1990) mostra como um processo de crescimento se desenvolve a partir das construções anteriores, sendo possível construir uma formalização do processo de equivalência e adição.

Observam-se mudanças radicais no raciocínio dos alunos, o que demonstra que um processo construtivo está em andamento. De fato, uma criança de 8 anos é capaz de mostrar que repartir 2 pizzas entre 3 pessoas é “o mesmo” que 5 entre 8, pois cada uma pega meia pizza e o resto, sendo tão pequeno, é descartado. Crianças um pouco maiores, estabelecem uma diferença ao situar ou colocar os pedaços um em cima do outro e observando que esses não são iguais. Um aluno de 11-12 anos pode pensar e comparar que $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{6}$ ($\frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$), e $\frac{5}{8}$ é tão somente $\frac{1}{8}$ maior do que $\frac{1}{2}$ ($\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8}$). Por último, encontramos alunos de 13 anos que vão raciocinar simbolicamente fazendo a passagem para os decimais ou para um denominador comum ($\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$, $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$, $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$).

As experiências realizadas (Streefland, 1987; Giménez, 1991) levam-nos a pensar que os processos de construção melhoram quando as pessoas percebem a necessidade de analisar diversas situações abertamente. Por outro lado, a construção deverá facilitar construtos de nível superior mediante a multiplicidade de situações (partição, misturas, intercâmbios, probabilidade, ampliação, redução etc.). Com isso, geram-se as noções de operador, medida, quociente e razão. As experiências realizadas mostram como tais situações devem ser multiplicadas, desdobradas, mas não são transferidas.

UM TRABALHO INICIAL DE ESTIMATIVAS COM GARRAFAS

Os aspectos dinâmicos da quantidade são diferenças sutis que estabelecemos com bastante clareza e que sugerem a ideia de operador. Daí, o sentido global da expressão “dinâmico” encontra-se vinculado a um “fato relacional”, que normalmente implica dois entes ou relaciona indivíduos numa situação de diálogo.

Chamamos de *dinâmica* a situação de fração como quantidade na qual se efetua uma partição ou agrupamento de objetos entre indivíduos e se deseja saber quantos correspondem a cada um. Denominamos de *estática* a situação que representa o que o indivíduo tem como parte de um todo. Essa última situação sugere uma repartição, mas expressa a situação final “prescindindo” do que tem acontecido. A situação dinâmica coloca de manifesto essa repartição e mais adiante leva a associar a razão como expressão de uma divisão. Um tipo de situação dinâmica pode ser o trabalho com estimativas, que comentamos a seguir.

Veja como o leitor poderia pensar uma tarefa para o trabalho inicial com estimativas:

Sobre a mesa, temos 1 garrafa de 1 litro e 4 recipientes de $\frac{3}{4}$ l, $\frac{1}{3}$ l, $\frac{1}{4}$ l e $\frac{1}{5}$ l. Cada recipiente leva uma etiqueta com a letra (A, B, C e D) correspondente para facilitar seu reconhecimento.

Sugestão

Pede-se aos alunos:

1. Ordenar os recipientes da maior para a menor capacidade.
2. Dar um número a cada recipiente em relação ao litro (ao qual dá-se o valor de £).
3. Estimar a adição de dois deles ($A + B$).
4. Comparar as medidas de dois deles num caso simples (quantas vezes C cabe em A). Através de perguntas abertas, o professor poderá saber o que pensam seus alunos. Por exemplo, relataremos algumas observações sobre ordenação, significado numérico, estimativa aproximada e comparação.

SOBRE A ORDENAÇÃO DOS RECIPIENTES E AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS

Uma vez apresentado o material pergunta-se aos alunos: “Qual dos recipientes tem maior capacidade?” E, depois, pede-se que “ordenem do recipiente de maior para o de menor capacidade”.

Todos os alunos distinguem o maior recipiente, pois esse se diferencia dos outros evidentemente. Alguns alunos se equivocam na ordenação com relação à denominação numérica dos recipientes e confundem os recipientes intermediários. Outros erros de ordenação aparecem ao considerarem iguais os dois recipientes menores. Ao estabelecerem relações numéricas, percebe-se que nenhum dos alunos muda a ordem dos recipientes, dada inicialmente. Em todos os casos, parece que eles confiam muito na sua observação e, quando relacionam quantidades – fracionárias ou não –, seguem a ordenação visual.

Entre os argumentos utilizados o mais usual é a observação simples da altura de cada recipiente. Nos casos em que houve erro de ordenação, é importante diferenciar os recipientes que são parecidos: “este é maior, pois é mais alto e largo”.

SOBRE O USO ESPONTÂNEO DAS FRAÇÕES E ESTRATÉGIAS UTILIZADAS NAS MEDIDAS

Diz-se aos alunos: “agora deve apresentar um número relacionado com quanto um recipiente cabe em relação ao litro, isto é, se ao litro atribuímos valor 1 (a unidade considerada), deve-se dar um valor a cada um dos recipientes”.

Todos os alunos já tinham realizado trabalhos semelhantes sobre as medidas de capacidade no sistema decimal e suas relações, mas só dois alunos as utilizaram em suas respostas. Dois alunos atribuíram números naturais, mas isso não cumpre nossos requisitos, pois ao litro foi atribuído um valor distinto.

Apesar do aparente desejo de usar as frações, a maioria não soube expressar as frações menores que $\frac{1}{4}$. Alguns usaram a representação usando centilitros, que disseram conhecer na vida cotidiana. Num caso particular, observamos a mudança de escala, quando valores são atribuídos conforme a visualização da medida, e logo ocorre a passagem para uma estratégia de intervalos, uma vez que se obtém frações muito pequenas:

Nuri (12 anos): “C é $\frac{1}{2}$, B é $\frac{1}{4}$, não, não C é $\frac{3}{4}$, B é $\frac{1}{4}$; D é mais do que $\frac{1}{4}$, e A é menos do que $\frac{1}{4}$ ”.

COMENTÁRIOS SOBRE OUTRAS ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS

Na maioria dos casos, a ordenação feita estava correta e coerente com a ordenação assinalada. Uma grande parte começou pela fração maior. Os primeiros encontraram as dificuldades com as frações menores, o que já foi comentado. Em muitos casos, eles usaram frações unitárias e binárias (alunos do 7º ano). Outros verbalizaram “a metade de um meio”, e outros usaram a expressão “meio-quarto”, principalmente os alunos do 5º, 6º e 7º anos. Poucos disseram que $\frac{1}{3}$ está entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Além disso, existem alguns estudantes que focavam seus comentários e observações no denominador e procuravam entender todas as frações como “quarta-parte”. Nesse tipo de raciocínio, o problema aparece quando as frações acabam, conforme se pode ver na resposta de João:

José (12 anos, 7º ano): “ $3/4$, $2/4$, $1/4$ e ... este é menor ... não sei não.”

Alguns fazem uma estimativa por intervalos ou pontes de referência, sem concretizar. Cristina (12 anos, 7º ano): “C é $3/4$, A é $1/2$; B é menor do que $3/4$ e maior que $1/2$; D é menor do que A”. Professor: “Que número você atribuiria a B e D?”

Cristina: “Não sei”.

Em outros casos, consegue-se a explicitação de uma resposta correta:

Maitê (12 anos, 7º ano): “C não é um litro, é $3/4$; A é $1/4$; B é maior que A é menor que B. Poderia ser $1/3$. Pode também ser $1/5$ ”.

Há alunos que também observam a relação de cada recipiente com o litro e não a relação entre eles, no que nós chamamos de processo de observação direta. Alguns fazem isso desordenadamente, outros erram as frações ao observar só o denominador ($1/3 > 1/2$, pois 3 é maior do que 2). Esse tipo de erro já foi bastante analisado por diferentes pesquisas (Hart, 1978; Filloy, 1986).

Foi surpreendente a incapacidade de responder, dada a dificuldade de representar frações menores que um meio. Embora a conservação da capacidade não fosse nosso objetivo, os estudantes não mostraram estabelecer esse tipo de percepção.

O domínio das frações $1/2$, $1/4$, $3/4$ coincidiu com os resultados do primeiro nível de Noelling (1978) e Kieren (1980). Esse nível é facilmente estendido às relações de ordem dessas frações e a uma predominância do status transicional, ao usarem as frações unitárias e binárias (Kieren, 1988). Isso parece aprofundar as hipóteses sobre o conhecimento ampliado, porém não completo da ordem nas frações arquimedianas. Somente um aluno de 12 anos pareceu estar situado no chamado nível simbólico (independência da representação), dominando tanto a forma fracionária como a decimal e expressando claramente sua relação.

Na continuidade do trabalho, formulamos a seguinte pergunta: *"Você poderia dizer que número seria $A + B$ com relação ao litro", isto é, "juntando os recipientes A e B, qual a capacidade resultante em relação ao litro?"*. O processo de estimativa foi difícil para alguns alunos que não tinham visto esse tipo de atividade e, assim, foram obrigados a prescindir da imaginação do resultado (nível de coerência dos dados numéricos). Essa dificuldade para observar a adição de líquidos está de acordo com os trabalhos de Lovell (1977) e Rico (1982). Em nosso estudo, apenas um aluno deu o resultado correto mediante a soma das frações correspondentes, e um grupo considerável concentrou-se na visualização do novo problema. Ou seja, quando não era possível expressar a soma de tais frações optavam pela aproximação simples, justificando, *"é mais da metade"* (Spinillo, 2003).

Em alguns casos, existem respostas aproximadas, e, quando o aluno não se dá por convencido ou percebe alguma incoerência em seu raciocínio, por exemplo, com os valores numéricos, eles se apoiam na visualização.

Sandra (9 anos, 5º ano): *"É mais do que um meio"*.

Exemplo: *"Quanto é ao final?"*

Sandra: *Não sei. "A é $1/2$ e B é $1/4$. Logo é mais que $1/2$ "*.

Francisco (9 anos, 5º ano): *"É mais da metade"*.

Exemplo: *"Por quê? Não tinha falado que A é $1/2$ e B é $1/4$?"*

Francisco: *"Não sei (pensa muito, parece que os números não saem fácil). Mas é claro, né!"* (Faz alguns gestos, indicando que cabe mais da metade).

Há também estudantes que apresentam uma aproximação correta a cada parte e não sabem expressar o resultado exato para a adição, com justificativa do tipo: *"é algo mais do que a metade"*.

Parece que isto é feito pela visualização, mas estão convencidos que a adição das frações dará mais do que $1/2$. Outros, quando fazem a aproximação da adição, pretendem ser coerentes com os dados numéricos apresentados e dão um resultado correto segundo os dados, mas nenhum deles segue a visualização para alterar a resposta. Apesar de uma ordenação equivocada, um único aluno expressou em decimais sua comparação.

Exemplo: *"Ordene, da maior capacidade para a menor, os recipientes".*

Sérgio (10 anos, 6º ano): *"C, D, A, B".*

Exemplo: *"Agora dá um número a cada recipiente com relação ao litro".*

Sérgio: *"C = 0,75; D = 0,5; A = 0,15; B = 0,5"* (parece confuso, porém aceita o enunciado). Exemplo: *"Agora pense que o número daria a A + B".*

Sérgio: *"A + B é $0,15 + 0,5 = 0,65$ ".*

Exemplo: *"É mais do que a metade?"*

Sérgio: *"Claro, é mais do que 0,5".*

Existem estudantes de 6º e 7º anos, principalmente, que não entendem a pergunta e dão resultados incoerentes e, quando "conhecem" o resultado, mostram-se bastante surpresos.

Luís (10 anos, 6º ano): *"Dá 2 litros".*

Exemplo: *"Como sabe?"*

Luís: *"Já falei que A é 1 litro e outro litro (indica para B) dá 2 litros".*

Exemplo: *"Ora, observa que esta garrafa é de 1 litro, pode ser A + B igual a 2 litros?"*. Luís: *"Não sei".*

Uns 20% foram capazes de notar visualmente a relação de volume; embora um grande número errou ao fazê-lo. Embora tivessem sido coerentes com as quantidades nomeadas, somente uma parte apresentou um resultado que prescindisse da visualização e centrou-se nos resultados aos quais foi atribuído o valor de 1 à garrafa. Nesse processo, identificamos a relação de reconstituição do todo. Notamos que essa coerência aumenta com o nível educativo: 20% no 5º ano; 40% no 6º. Um dos resultados importantes foi a constatação da elevada comparação errônea, a qual sugere a não aceitação do resultado “3 vezes” como real. Como era esperado, os alunos que escolheram a forma “natural simples” de representação ($A = 3$, $G = 8$ ou $A = 2$, $C = 7$) compararam corretamente as quantidades. As maiores dificuldades apareceram nos alunos que consideraram as representações usando centilitros. De fato, Jorge (6º ano) tinha que: $A = 38$ cl; $G = 45$ cl e percebeu que devia prescindir das quantidades e escolheu a visualização, ao constatar que G cabe 2 vezes e meia em A .

AS SITUAÇÕES DE INTERCÂMBIO

Depois da apresentação e discussão, cinco perguntas comparativas foram feitas numa folha de papel: uma comparação entre (2, 1) e (3, 1), equivalência entre (2, 3) e (4, 6), adição comparando com dobro entre (5, 3) e (4, 2), (5, 2) e (6, 3) e uma adição sem uma equivalência possível entre (5, 7) e (3, 5).

Numa segunda fase, foram feitas entrevistas com 113 alunos do 9º ano sobre as respostas dadas em dois testes distintos com cinco questões de troca, oito de probabilidade e seis questões típicas de razão. Os testes foram realizados num universo de 534 alunos (Giménez, 1991). Era parte de uma pesquisa mais ampla sobre implicações relativas ao conhecimento dos números racionais.

As questões de intercâmbio envolviam a troca entre uma certa quantidade de balas por selos, e era perguntado qual a melhor troca. Baseando-se no número de selos adquiridos através dela, Pedro trocou m selos por n balas, e Julia m' selos por n' balas.

O teste de probabilidade com oito diferentes itens abrangia diferentes contextos e problemas para serem resolvidos: (a) problemas de comparação numa roleta, nos quais os alunos tinham duas situações para comparar e decidir quais das duas apresentava mais chances, (b) extração de bolas com quantidades diferentes de bolas em cada caso, e (c) dado de seis faces explorando diferentes expressões verbais. No nosso trabalho, centramos o interesse nos dois primeiros itens, e os resultados específicos desses testes envolvendo probabilidade foram discutidos em Giménez (1991).

Na discussão sobre as atividades envolvendo desconto, alguns alunos explicaram o uso de equivalência como uma possível estratégia para resolver a comparação, embora tenhamos estimulado o uso de um mesmo ponto de comparação como uma estratégia melhor dentre outras e mais rica em significado. Como um aluno disse: *"Nós não podemos estabelecer comparação entre essas situações. Nós só podemos se tivermos o mesmo número de objetos, aí sim poderemos comparar os preços"*. As cinco questões apresentadas na folha de exercícios mostraram-nos que os alunos tiveram várias dificuldades para entender as situações dos problemas que envolviam razão, apesar das discussões coletivas sobre os dados do problema (preços e descontos) terem sido feitas antes da apresentação das questões. Constatamos que a discussão prévia não ajuda o suficiente para resolver as dúvidas que aparecem sobre as questões propostas. A situação que envolve adição foi a que apresentou maior dificuldade, mas o acréscimo nos acertos pode significar uma influência da discussão feita na classe durante todo o trabalho.

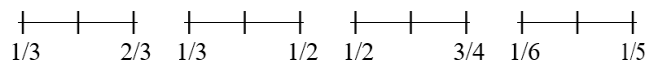
Observações foram feitas por alguns alunos, mas um terço tentou interpretar cada situação como "uma nova" sem citar a regra

de denominador comum oferecida no início. Muitos deles encontraram dificuldades similares em todos os itens que envolviam adição, usando uma esperada "razão somada". Apenas seis alunos usaram o denominador comum como estratégia em todas as situações. Quando números decimais apareceram nas sessões seguintes encontramos dificuldades similares àsquelas encontradas por Bell e Beedy (1983) tentando resolver comparações.

LOCALIZANDO NA RETA NUMÉRICA: OUTRAS ESTRATÉGIAS

A sala de aula deve ser vista como um espaço de diálogo contínuo, no qual professores e alunos compartilham vivências e conhecimento. Para isso, é importante que seja construída uma relação de respeito e que ambos estejam dispostos a aprender continuamente. Veja a discussão entre um professor (I) e um aluno (E) de 11 anos sobre a localização de pontos intermediários em uma reta. Reflita sobre suas possíveis reações num diálogo com os seus alunos!

E. *Procure o número correspondente ao ponto em cada caso. Colocamos o ponto exatamente no meio de cada peça. Faça os seguintes desenhos:*



Caso 1. Entre $1/3$ e $3/2$.

Sem dificuldades alguma e sem escrever nada, coloca $1/2$.

I. *Por quê?*

E. *Ora, coloco $2/6$ e $4/6$ (escrevo-os, independente dos pontos do desenho). Assim, $3/6$ é o médio. Agora deixe eu traçar os outros.*

(3 minutos após ele me chama e diz ter terminado)
Caso 2. Entre $1/3$ e $1/2$.

E. Agora faço $2/6$ e $3/6$. Não. $3/6 = 4/12$

Não. $6/12$ (sem sinal de $=$). Ah! Já sei. É $5/12$.

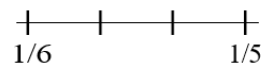
Caso 3. Entre $1/2$ e $3/4$.

Escreve $4/8$ e $6/8$. Coloca $5/8$ no meio.

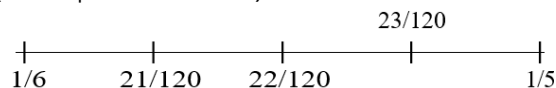
(Vendo que ele fez tudo correto, continuo perguntando).

I. Como vejo que sabe, entre $1/6$ e $1/5$, coloco 3 peças no lugar de 2 (mudo o desenho para o seguinte).

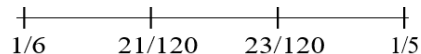
É um pouco mais difícil.



E. (Eis o que ele escreve)



I. Olhe que encontrou números entre um sexto e um quinto, mas isto não vale, pois o desenho pedia que se dividisse em 3 partes iguais, e você simplesmente aumentou um a mais. Assim, ele escreve.

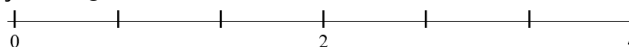


E. Mas é impossível. Veja que não está correto. De fato temos uma peça a mais. Como se faz? (Se aborrece)

I. Vamos pensar um pouco mais?

Alguns dias depois:

I. *Parece que você está de bom humor hoje. Vou te propor um problema mais simples do que aquele que você não resolveu noutro dia. (Faço o seguinte desenho). Olhe:*



I. *Quais números coloco nos pontos?*

E. (Escreve $\frac{3}{4}$ e 1 e, $[0, 2]$. Apaga imediatamente e diz). *Não, não pode ser. Serão $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{1}{3}$?*

I. *Supondo que esteja correto, como colocar os outros?*

E. (Escreve 2, $\frac{1}{3}$, ...) *Não, não, 2, $\frac{2}{3}$ (convencido) e 3, $\frac{1}{3}$.*

I. *Muito bom! Agora espero que saiba resolver o problema do outro dia com $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$.*

E. *Já falei que não sei.*

I. *Se você resolveu o anterior, com certeza resolve esse.*

E. *Bem...*

(Escreve igualdades nos extremos procurando um fator comum). $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$, $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$ (Agora repete a sequência de metas des dobrando os denominadores).

Olhe, com este (denominador 60) não podemos fazer os pedaços em 3. (Comenta que não pode dividir em três partes a diferença de numeradores e desenha as subdivisões até achar que a diferença é subdivisível).

Entre 20 e 24, não ... 40, também não... Talvez entre 80 e 96. (Desenha as partes). Agora vai.

I. *Tem certeza?*

E. *Ah, não. Esqueci um traçado, são 16 (a distância entre 80 e 96).*

I. E?

E. Não podemos entre 3.

I. Continua para ver...

E. Quer que coloque 192/860...? (Pensa que os pedaços ou intervalos ficariam impossíveis de desenhar). O outro é 160/860!

I. Pensa em como justificar isto?

E. Pois não, são 32.

I. E o que acontece?

E. Não dá exato entre eles. Entre 2 dá, mas não entre 3.

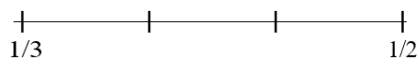
I. Ok, parece que com o teu processo não se obtém a solução.

E. Já falei para não colocar problemas que eu não sei resolver!

I. Olhe bem para este mais fácil. Entre 10 e 11 coloco 3 pontos na mesma distância. Talvez seja mais fácil!

E. Escreve imediatamente 10 $\frac{1}{3}$, 10 $\frac{2}{3}$, 10 $\frac{3}{3}$. Pensa um pouco e diz 10 $\frac{3}{3}$ é 11.

I. Bom, este está resolvido, e este?



Agora, diga o que fez para resolver o outro.

E. Encontrei frações fazendo cada vez o dobro (isto é o denominador comum, que é o que ele indica) ou, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24}$
 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24}$

I. O que acontece?

E. *Que podia saber a metade (marca o meio pontilhado e escreve) $5/12$ (no ponto médio), mas não posso fazer 3 partes... Oh! (Marca a outra linha pontilhada à esquerda e tenta encontrar a 3ª parte fazendo metades). Não, não é assim.*

I. *Será que não existe outro denominador com o qual seja possível? Prove com outros números.*

E. *Ah! Deve ser 6, 12... Entre estes dois não vale. Talvez... 18 (olha um pouco aborrecido). Escreve $1/3 = 6/18$ (embaixo da vertical do ponto) e $1/2 = 9/18$. Claro (escreve na linha) $7/18$ e $8/18$ (Faço um gesto de aprovação e imediatamente prossigo).*

I. *Tudo bem. Tenta agora o problema difícil apresentado no começo (divisão do segmento $1/6$, $1/5$ em 3 partes).*

E. *Espere. Primeiro vou procurar os possíveis números que funcionem, 30, 60... entre estes dois acho que não existe nenhum.*

I. *Qual o seguinte que já foi provado?*

E. *120, já sei... 30, 60, 90 não valem. Provarei com o 90 que ainda não tinha feito. (Divide $90 : 6 = 15$ e num outro lado faz $90 : 5 = 18$; com cara de satisfeito... escreve na linha) sim, são $16/90$ e $13/90$.*

I. *Por que não saiu antes?*

E. *Sim, eu não provei todos os números. Deverá funcionar com 150 e 180.*

I. *Talvez não com todos.*

E. *Claro, só com 90, 180, com 260 (não, é 360).*

I. *Bem, prova este mais difícil... Parti o segmento $[1/3, 1/5]$ em 5 partes... Logo, é 30.*

The background image is a blue-tinted photograph showing several hands interacting with a board game. In the foreground, a hand is moving a small, light-colored tile with the number '2' on it. To the left, a grid of numbered tiles is visible, with numbers ranging from 1 to 13. In the background, a computer keyboard is partially visible, and another hand is seen near it. The overall scene suggests a learning activity involving fractions and games.

3

**FRAÇÕES ATRAVÉS DE
JOGOS E ATIVIDADES
MANIPULATIVAS
VARIADAS**

"Gostei de saber dos erros que os alunos cometem na transferência dos procedimentos válidos nos naturais para as frações. São alguns detalhes que o professor nem sempre dá importância, e o aluno não consegue perceber essas mudanças. Por isso cometem erros". Alessandra

Pesquisas em Educação Matemática têm ressaltado a atenção que o professor deve ter aos diferentes processos cognitivos dos alunos ao realizarem tarefas matemáticas e, conseqüentemente, a importância de se utilizar uma variedade de atividades nas quais alunos e professores possam comunicar suas ideias e produzir diferentes significados (Lins e Giménez, 1997) para o processo ensino-aprendizagem de matemática.

Conforme apresentamos, as noções sobre frações vão evoluindo e constituindo-se através da proposta e desenvolvimento de uma variedade de situações de aprendizagem, de modo que o professor possa ir conhecendo cada vez mais o progresso conceitual de seus alunos. Neste capítulo, exemplificamos situações que podem enriquecer as aulas sobre frações, conforme indicado a seguir.

J1 - Cartões com Coleções (Situações de Ordenação)	57
J2 - Cartões Coloridos	65
J3 - Círculos coloridos.....	71
J4- Fracículos.....	80
J5 - Triângulos	90
J6 - Hexágonos.....	94
J7 - TANGRAM Triangular	102
J8 - TANGRAM Retangular de 7 Peças	104
J9 - TANGRAM Chinês Original.....	105
J10 - Uso de Quadriculados	106
J11- Geoplano.....	107
J12 - Dominó de Identificação Simples - Parte de uma Unidade.....	115
J13 - Dominó de Identificação Simples - Parte de uma Unidade.....	118
J14 - Dominó de Identificação Simples.....	120
J15 - Dominó de Identificação com Equivalência	123
J16 - Dominó de Identificação com Equivalência.....	127
J17 - Bingos Fracionários - Identificação de Frações.....	129
J18 - Bingos Fracionários - Soma e Subtração de Frações	135
J19 - Bingos Fracionários - Divisão de Frações.....	147
J20 - Jogos com Cartas (A).....	152
J20 (A) - Jogo das Família.....	153
J20 - Jogos com Cartas (B).....	159
J20 (B) - Jogo das Famílias.....	160
J21 - Escrevendo Frases Fracionárias (A).....	167
J22 - Escrevendo Frases Fracionárias (B)	180
J23 - Jogos de Percurso Fracionário	184
J24 - Bingo de Aproximação da Reta.....	192
J25- Ordenando Frações	206

FRAÇÕES: JOGOS COM CARTÕES

OBJETIVOS GERAIS:

- Expressar partes de uma coleção mediante frações.
- Variar o todo ou quantidade de referência.
- Relacionar as quantidades por meio de uma fração.
- Constatar as correspondências que existem entre o significado da fração como medida de superfície e como operador sobre quantidades discretas.

Expressão está sendo usada como representação numérica (de barras) das frações: $1/2$; $1/3$...

Ordenar frações por sua expressão considerando um tipo de figura (retângulo ou outras), assim como pela coleção de objetos.

RELAÇÃO DE JOGOS:

- J1- Cartões com coleções (retângulos).
- J2- Cartões coloridos (retângulos).
- J3- Círculos coloridos.
- J4- Fracírculos.

J1 - CARTÕES COM COLEÇÕES (SITUAÇÕES DE ORDENAÇÃO)

MATERIAL:

1. Cartões com coleções de desenhos alinhados em forma retangular, com as seguintes quantidades e distribuições (quantidade = linha x coluna):

$$\begin{array}{lll} 24 = 6 \times 4 & 36 = 6 \times 6 & 48 = 6 \times 8 \\ 72 = 12 \times 6 & 72 = 8 \times 9 & 96 = 8 \times 12 \end{array}$$

O tamanho de todos os cartões é o mesmo, embora varie a quantidade de elementos. A distribuição das filas e colunas permite unificar a forma das partições.

2. Tiras e placas transparentes em várias medidas diferentes, de forma que cada uma cubra uma parte do retângulo de cartolina, e separe uma parte da coleção.

As frações representadas são:

$$1/2 \quad 1/3 \quad 2/3 \quad 1/4 \quad 3/4 \quad 1/6 \quad 1/8 \quad 1/12$$

Procuramos deixar todo o material num tamanho adequado para reprodução.

METODOLOGIA:

- Escolher uma das coleções de elementos.

Por exemplo, tomemos a coleção de 24 elementos. Coloque sobre ela, sucessivamente, todas as tiras e placas transparentes. Anote a quantidade de elementos que representa cada parte.

$$1/12 \text{ de } 24 = 2; \quad 1/8 \text{ de } 24 = 3; \quad 1/6 \text{ de } 24 = 4; \quad 1/4 \text{ de } 24 = 6$$

- Ordenar esses resultados do menor para o maior. Fazer o mesmo com as outras tiras e as frações.
- Comparar as frações $2/3$ e $3/4$.

Descobrir qual é a maior observando a quantidade que representam sobre diferentes coleções.

$$2/3 \text{ de } 24 = 16; \quad 3/4 \text{ de } 24 = 18; \quad 16 < 18$$

$$2/3 \text{ de } 36 = 24 \quad 3/4 \text{ de } 36 = 27 \quad 24 < 27$$

$$2/3 \text{ de } 48 = 32; \quad 3/4 \text{ de } 48 = 36; \quad 32 < 36$$

- Comprovar, em seguida, a mesma relação pelas dimensões das tiras correspondentes.
- Estabelecer relações entre quantidades.

Em uma determinada coleção, contar uma parte dos elementos e saber encontrar a fração que a relaciona com o total. Por exemplo: Se dos 24 elementos, separamos 4, qual fração do total esses elementos representam?

- Descobrir a coleção total.

Dada uma fração e a quantidade de elementos que representa, descobrir a coleção total.

Por exemplo:

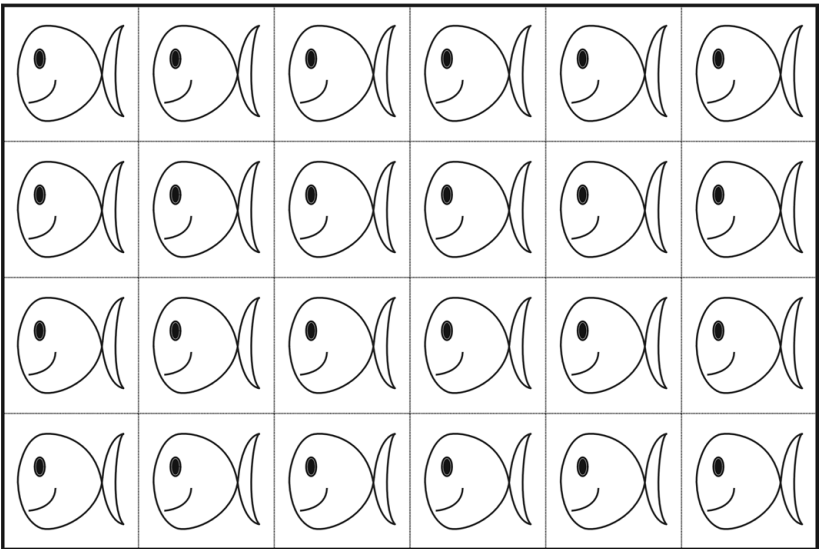
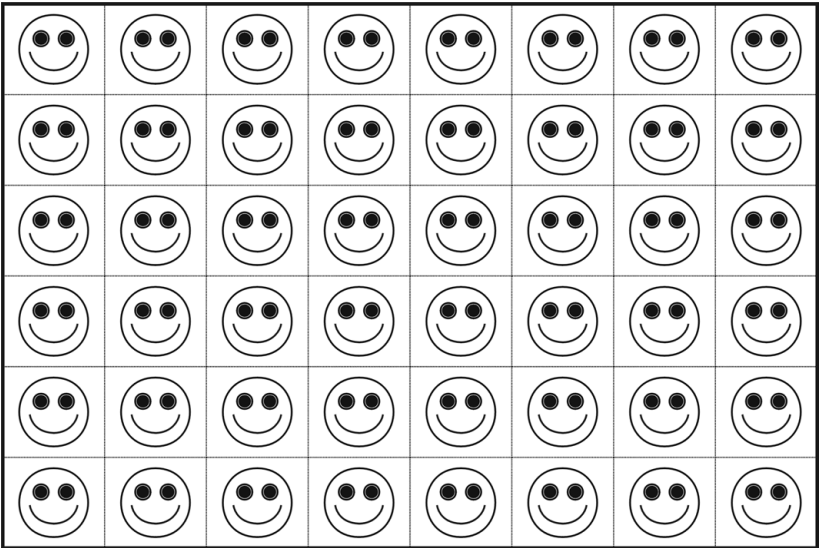
$$? \times 1/4 = 18 \text{ ou } 1/4 \text{ de } ? = 18$$

NÍVEL DE APLICAÇÃO:

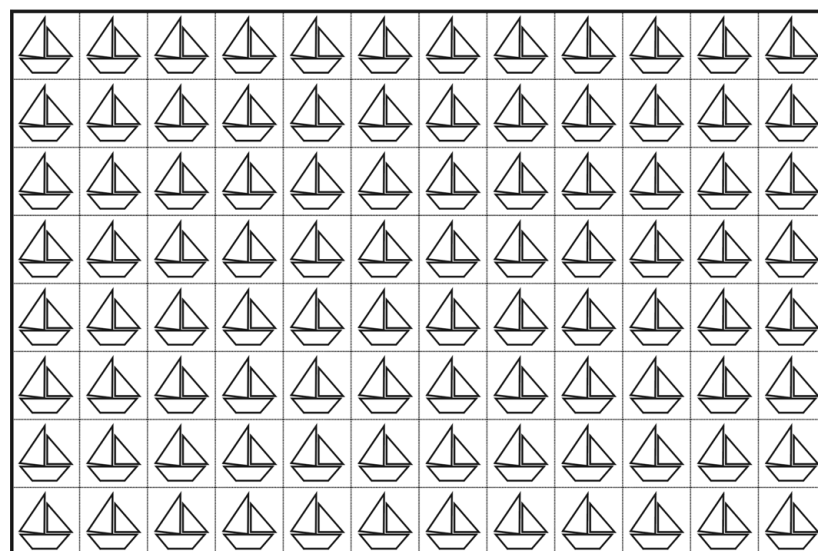
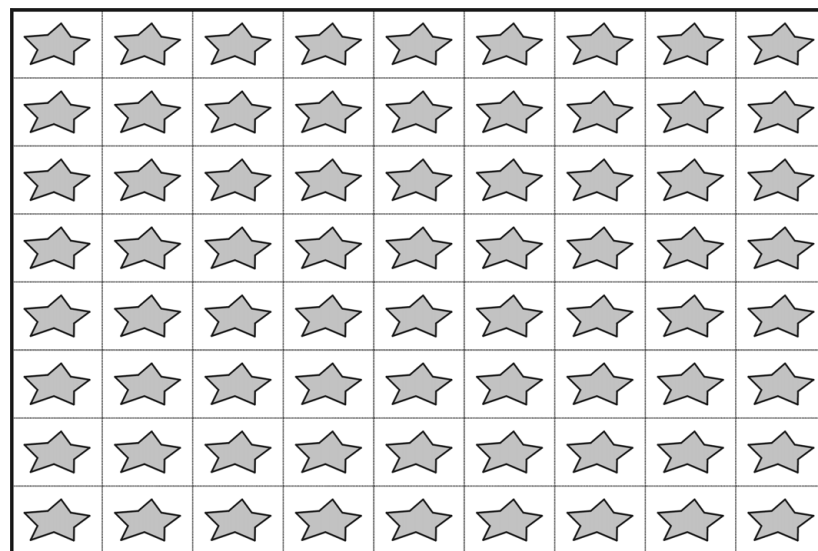
- A partir de 10 anos, sucessivamente, pode se relacionar partes de coleções com frações.

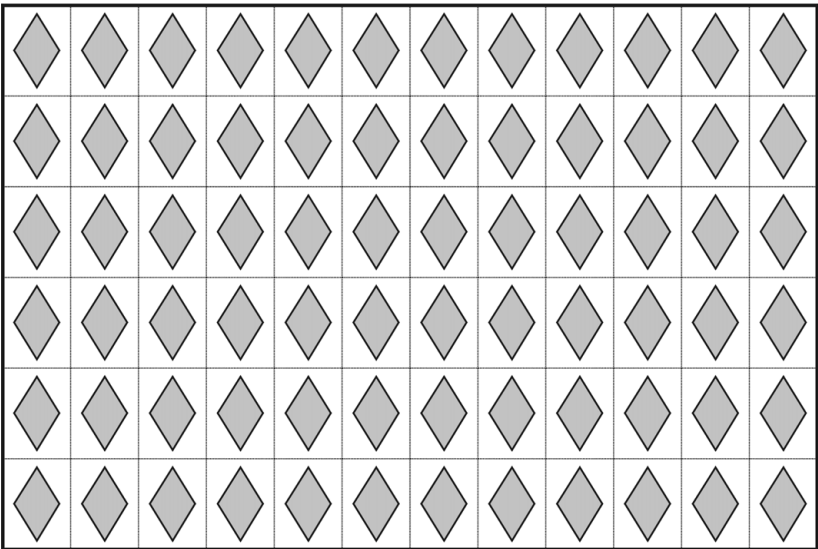
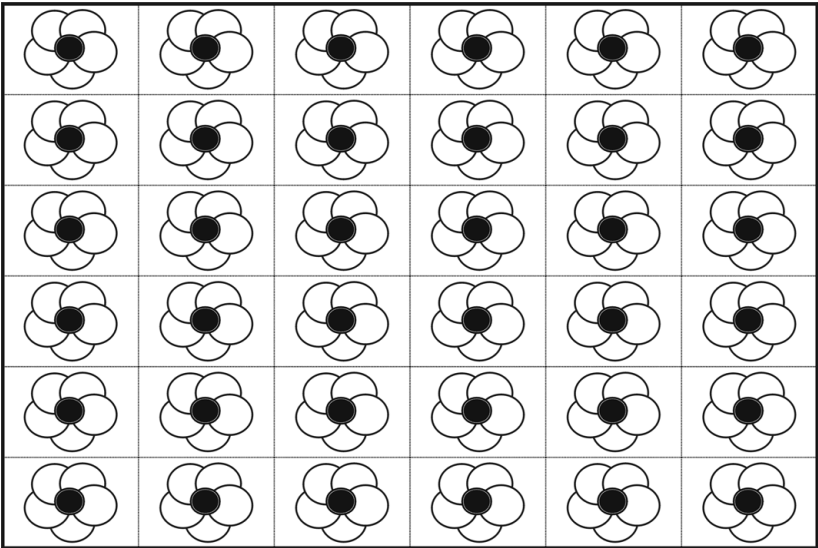
SUMÁRIO

O nível de aplicação não é rígido.
Ele depende da realidade de
cada escola.



SUMÁRIO







1/6
1/9
1/3
1/2

2/3

1/4

1/8

SUMÁRIO

1/2

64

J2 - CARTÕES COLORIDOS

MATERIAL:

- Cartões quadrados representando uma unidade, divididos em diversas frações da unidade.

METODOLOGIA:

Preparação

- Pinte cada quadrado unitário de uma cor.

RELAÇÃO COM A UNIDADE:

- Monte uma tabela indicando as cores usadas.

Um cartão verde é _____ da unidade.

Um cartão vermelho é _____ da unidade.

Um cartão azul é _____ da unidade.

(Escreva $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$ atrás de cada tira verde, vermelha ou azul).

2. Quantas metades formam uma unidade? _____

Quantos quartos há em uma unidade? _____

Precisamos de quantos oitavos para formar uma unidade?

RELAÇÃO ENTRE OS CARTÕES:

- Compare os cartões: verde, vermelho e azul:
Com _____ vermelhos, cubro o verde.
Com _____ azuis, cubro o vermelho.
Com _____ azuis, cubro o verde.
- Registremos, agora, essas conclusões atrás dos cartões.
_____ de $1/4$ é $1/2$.
_____ de $1/8$ é $1/4$.
_____ de $1/8$ é $1/2$.
Comprove com os cartões que $1/4 + 1/4 = 1/2$ isto é $2/4 = 1/2$.
- Copie e complete com a ajuda dos cartões:
 $1/4 = \dots/8$ e $1/2 = \dots/8$
- Copie, ordenando da maior para a menor:
 $1/2$; $1/8$; $1/4$ $1 > \dots > \dots > \dots$
- Complete com o sinal adequado: $<$, $>$ ou $=$.
 $1/2$ $1/6$ e $1/4$ $2/8$
 $1/4 + 1/4$ $2/8$ e $1/2 + 1/4$ $3/8 + 3/8$



[illegible]



SUMÁRIO



SUMÁRIO

J3 - CÍRCULOS COLORIDOS

MATERIAL:

- 6 discos circulares fracionados em metades ($\frac{1}{2}$), terços ($\frac{1}{3}$), quartos ($\frac{1}{4}$), sextos ($\frac{1}{6}$), oitavos ($\frac{1}{8}$) e um doze avos ($\frac{1}{12}$).

Cada círculo deve ser pintado com uma cor distinta, segundo o número de partes em que se encontra dividido para poder facilitar a distinção de cada parte visualmente e não apenas por sua medida.

Escolhemos os denominadores 2, 3, 4, 6, 8 e 12, pois, além de simples, permitem estabelecer muitas relações de equivalência entre estas partes.

OBJETIVOS:

- Introduzir a noção de partição em partes iguais.
- Visualizar a relação entre as partes e o círculo completo unitário.
- Identificar a representação com o nome correspondente (denominador) assim como o símbolo.
- Reconhecer a relação de ordem entre as partes fracionárias.
- Conhecer algumas relações de equivalência.
- Introdução da ideia de numerador somando partes iguais.
- Introduzir a adição e a subtração de partes diferentes em alguns casos possíveis.

METODOLOGIA:

1. Partes da Unidade

Identificar a fração que representa cada peça separadamente.

1.1 Observação e classificação das peças

- Contar quantas peças de cada cor existem.
- Comprovar se todas as peças são iguais.
- Unir peças para formar círculos completos (discos).
- Comprovar que os círculos obtidos são do mesmo tamanho ainda que se encontrem partidos num número distinto de partes.
- Escrever essas observações. Por exemplo:

O círculo verde está dividido em duas partes.

O círculo vermelho está dividido em quatro partes etc.

1.2 Expressão Verbal e Simbólica

- Nomear cada uma das peças: metade, meio; terço, terça parte, quarto etc.
- Escrever simbolicamente a relação entre cada peça e o círculo completo. Por exemplo

2. Ordenação

- Ordenar as peças segundo seu tamanho (área).
- Desenhar as peças de modo que se observe essa ordenação (para desenhar uma peça basta marcar o seu contorno).
- Escrever a fração correspondente a cada peça mantendo a ordem do gráfico.

- Observar que as frações maiores possuem denominadores menores.

Nível de Aplicação: Estas duas atividades podem ser realizadas a partir do 5º ano do Ensino Fundamental, porém é conveniente que os estudantes tenham experiências anteriores de partição de objetos. Também devemos ver a necessidade de se nomear as frações: metade, terço, quarto etc., antes dessas atividades.

3. Relações entre Frações

Relacionar algumas peças entre si como fração de fração.

- Observar quantas vezes cabe cada uma das peças listadas na peça indicada depois:

$1/4$, $1/6$, $1/8$ e $1/12$ em $1/2$

$1/6$, $1/12$ em $1/3$

$1/8$, $1/12$ em $1/4$

$1/12$ em $1/6$

Escrever, em forma de fração, as relações que encontramos manipulando as peças coloridas. Por exemplo:



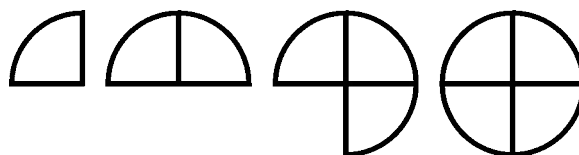
$$1/4 \text{ é } 1/2 \text{ de } 1/2 \text{ ou } 1/4 = 1/2 \times 1/2$$

Nível de Aplicação: Esta atividade pode ser realizada a partir do 6º ano.

4. Reunião de Partes Iguais

Até aqui, os estudantes investigaram as frações de numerador unitário, ou seja, apenas uma peça. Agora, eles investigarão as que podem formar com peças iguais até a unidade completa (disco unitário).

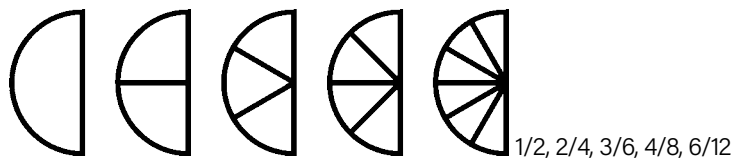
- Com as peças de uma mesma cor, construir todas as configurações que podem ser formadas num círculo e desenhá-las. Por exemplo:



- Aprender como se nomeiam e os símbolos correspondentes para indicá-las.
- Fazer o mesmo com as demais cores.

5. Comprovar a Equivalência entre Algumas Frações

- Construir com peças de uma mesma cor uma figura equivalente à metade ($1/2$) do círculo de todas as maneiras possíveis.
- Desenhar as configurações obtidas e escrever a equivalência correspondente das frações.

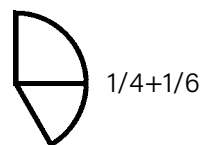


- Fazer o mesmo com estas: $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$, $1/6$, $5/6$.

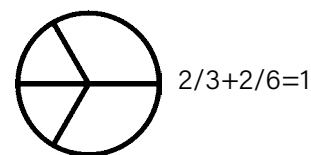
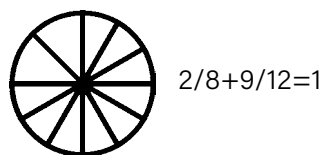
6. Reunião de Peças Distintas

Ainda que pareça simples unir duas peças distintas ao acaso e expressar a sua soma em forma simbólica, o resultado de cada operação em muitos casos não possui um resultado fácil de ser identificado (visualmente ou numericamente). Por isso, sugerimos outros exercícios com um grau de dificuldade menor.

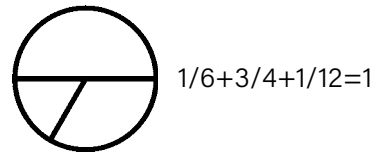
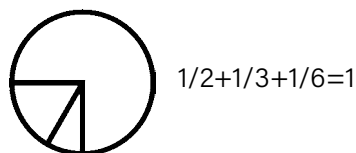
- Representar mediante um desenho uma parte da unidade que será expressa como uma adição de frações. Por exemplo:



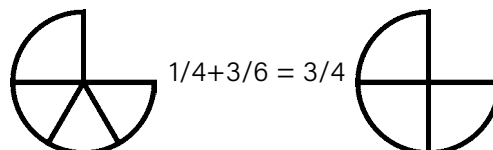
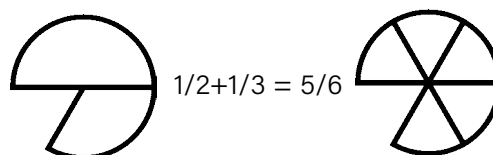
- Encontrar a peça correspondente ao total e escrever a adição: $1/3 + 1/6 = ?$ $1/4 + 1/12 = ?$ $1/6 + 1/12 = ?$
- Completar a unidade (disco unitário) usando apenas duas cores, simbolizando depois a soma com as correspondentes frações. Por exemplo:



- Completar o disco unitário (unidade) com três cores diferentes, simbolizando depois a soma mediante as frações correspondentes. Por exemplo:



- Representar algum resultado (da soma de peças diferentes) com peças de uma mesma cor. Depois, escrever as frações correspondentes a cada uma das expressões. Por exemplo:

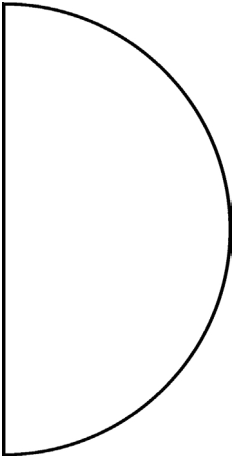
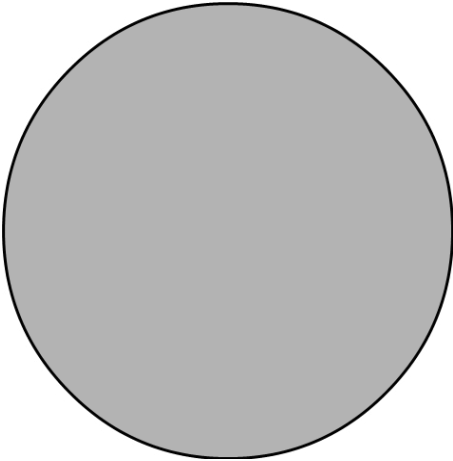


7. Diferenças entre Frações

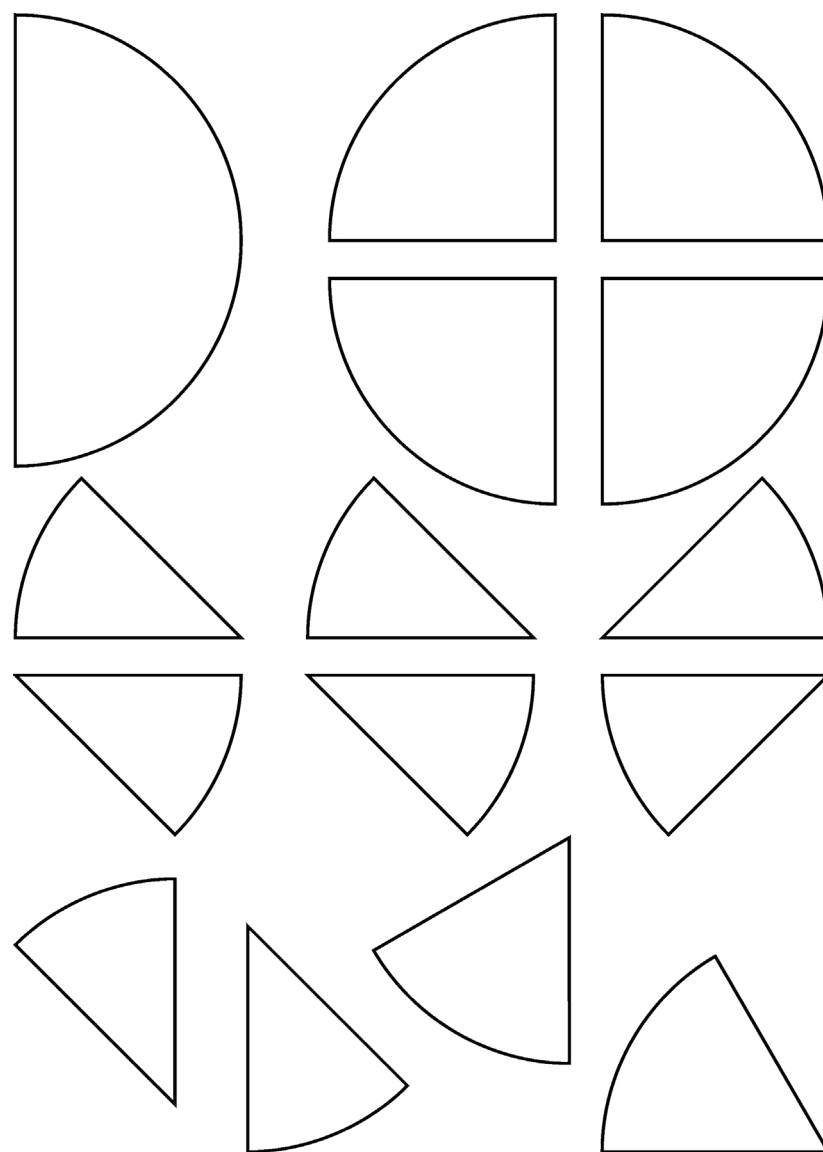
A diferença entre as frações pode ser desenvolvida a partir de duas perspectivas distintas:

- O que acrescentaria a uma peça para que ela se torne a maior?
- O que sobra da peça maior se retirarmos uma região correspondente à peça menor?





SUMÁRIO



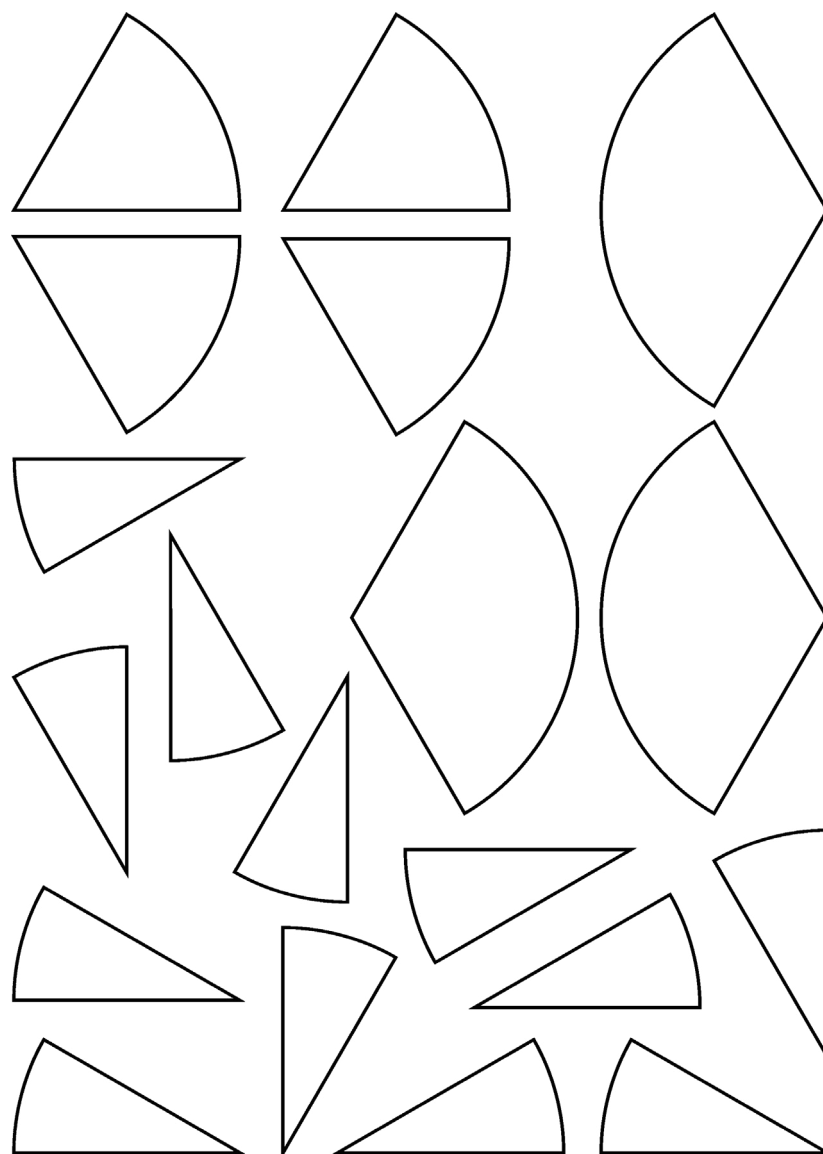
$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$

SUMÁRIO



SUMÁRIO

J4 - FRACÍRCULOS

MATERIAL (P. 36 A 38):

- 35 discos circulares fracionários para jogar, incluindo:
- 2 metades, 3 terços, 4 quartos, 6 sextos, 8 oitavos e 12 doze avos;
- 8 discos unitários para servir de base;
- 1 dado com metades, terços e quartos;
- 1 dado com sextos, oitavos e doze avos.

OBJETIVO DO JOGO:

Completar o maior número de discos unitários ao final do jogo.

METODOLOGIA:

Preparando o Jogo

O estudante deve primeiro se familiarizar com as peças fracionárias do jogo. Desse modo, o estudante irá estabelecer algumas relações entre as frações [isso pode ser feito através das atividades do jogo anterior (J3)]. O Fracírculo pode ser jogado individualmente no início, com o estudante pegando um disco unitário como base, jogando um dos dados e colocando a peça fracionária correspondente sobre o disco-base até construir o círculo completo.

COMO JOGAR

1. Quando estiverem preparados, os jogadores usarão apenas as peças fracionárias maiores ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$) e o dado correspondente.
2. Cada jogador pega dois discos-base, deixando o restante do material guardado. A cada rodada, o jogador poderá pegar mais um disco-base, enquanto houver discos-base de reserva. Os jogadores não poderão pegar discos-base de outros jogadores.
3. O primeiro jogador, que é escolhido por qualquer método aceitável pelo grupo, lança o dado. O jogador, então, pega a peça fracionária correspondente à fração sorteada e a coloca em um de seus anéis.
4. O jogo deve rodar no sentido horário, com cada jogador lançando o dado e colocando a peça fracionária correspondente em um de seus discos-base. O jogo continua com os jogadores tentando completar um círculo com as devidas peças fracionárias. Quando um círculo estiver completo, ele é retirado do jogo, e nem o disco-base, nem as peças fracionárias que o formam poderão ser usadas novamente durante aquela partida.
5. Se uma peça fracionária sorteada pelo dado não puder ser mais usada, ou o jogador não quiser utilizá-la, ele poderá passar para o jogador seguinte, sem fazer nada.
6. Um jogador, durante sua vez, pode mover uma peça fracionária de um disco ainda incompleto para outro, sem penalidades.
7. O jogo continua até todas as peças serem utilizadas. O jogo termina neste ponto, e o jogador com o maior número de círculos completos é o vencedor. Caso ocorra empate entre

dois ou mais jogadores, será vencedor aquele que tiver o disco incompleto com a menor fração faltando para ser completado. Para determinar quem tem o disco mais completo, os jogadores poderão sobrepor os discos entre si e verificar visualmente.

Variações das Regras

1. Com estudantes maiores, use as peças fracionárias menores ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{12}$) e o dado correspondente.
2. Para estudantes do 6º ano 9º anos, use os dois dados e todas as peças fracionárias. Os jogadores lançam os dois dados e pegam as peças fracionárias correspondentes à SOMA das frações sorteadas em cada um dos dados. Por exemplo, se forem sorteadas as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$, o jogador poderá pegar as peças: metade e um sexto ou um terço e dois sextos ou dois quartos e um-sexto ou qualquer outra combinação que totalize a SOMA apresentada pelos dados. O jogo continua conforme as regras do jogo regular.
3. Frações Negativas: Cada jogador monta dois círculos completos com quaisquer peças fracionárias que desejar. Usando um dado, cada jogador retira a peça fracionária de um de seus círculos correspondente à fração sorteada pelo dado. Durante cada jogada, o jogador pode trocar as peças fracionárias restantes num círculo por outras peças desde que totalizem a mesma quantidade fracionária. Por exemplo, se um quarto for sorteado pelo dado e o jogador tiver uma metade em um de seus círculos, ele poderá trocar a metade do círculo por dois quartos e retirar uma das peças de um quarto do círculo correspondente. O primeiro jogador que conseguir retirar todas as peças fracionárias dos dois círculos é o vencedor.

QUESTÕES A LEVANTAR

- Quais tipos de discussões este jogo permite desenvolver com os estudantes?
- Como analisar o jogo com os estudantes?
- É possível criar alguma forma de pontuação para o jogo? Qual seria a mais interessante?
- Segundo a pontuação, é possível desenvolver uma forma de registrar as frações, somas ou subtrações que forem utilizadas? Por que esse registro é necessário?

COMPOSIÇÃO, DECOMPOSIÇÃO E RELAÇÕES DAS ÁREAS DAS FIGURAS

O jogo tradicional chinês conhecido no ocidente como TANGRAM (TAM = chinês; GRAM = diagrama) é formado por sete peças que se unem, sem sobreposição, para formar inúmeras figuras. Diversos jogos com diferentes números de peças e diferentes formatos são desse tipo que passaremos a chamar de "tangrans".

MATERIAL:

- Tangrans de diferentes formas e quantidades de peças segundo os níveis de dificuldade (faixa etária, experiência prévia, conservação de área etc.).

METODOLOGIA:

1. Identificar, em cada jogo, as diferentes peças e suas quantidades. Observar as diferenças e semelhanças [tamanho (área) e forma]. Podem surgir figuras com a mesma forma ou com a mesma área.

- 2a. Observar as relações entre as peças e as ordenações e equivalências que se deduzem a partir delas.

Existem dois tipos básicos de relações:

- i. IDENTIDADE ($A = B$), as quais possuem a mesma área e a mesma forma.
- ii. COMPOSIÇÃO ($A = 2 B$) ou ($A = B + C$).

- 2b. Explorar os diferentes registros dessas observações [leitura, interpretação, representação gráfica, numérica, simbólica].

Aqui podemos iniciar com uma descrição (que já apresenta a necessidade de “nomear” os objetos) e ao mesmo tempo iniciar uma discussão sobre o uso de símbolos: $A =$ área da figura “A” = identidade (entre áreas, formas ou áreas e formas).

3. Observação (e registro) das relações entre três peças.

Aqui surgem relações do tipo parte de parte ou fração de fração. Podendo-se observar o produto entre as frações. Por exemplo:

$$A = \frac{1}{2} B \text{ e } B = \frac{1}{4} C \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} C\right) = \frac{1}{8} C$$

4. Completar uma tabela de relações de medidas entre peças, a partir das relações já conhecidas. Mesmo com um pequeno número de peças, surge uma grande quantidade de relações.

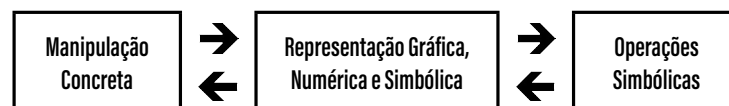
O trabalho poderia começar com uma discussão sobre como organizar essas “informações” de maneira concisa. Discutir as propostas dos estudantes e apresentar a tabela de dupla entrada como um instrumento organizador de informações.

A FAMÍLIA DE TANGRANS

Apresentaremos um material que é fruto de uma experiência de trabalho realizada em algumas turmas (do sexto ao nono ano) de modo a amadurecer e fixar o conceito de frações, de equivalência, de ordenação e de soma.

Antes de iniciar a descrição da experiência, é preciso estabelecer algumas “coordenadas didáticas” que orientaram o trabalho.

- Acreditamos que, numa primeira fase de MANIPULAÇÃO, o estudante começa a exploração jogando com os objetos concretos: as metades, os quartos etc. Já visualizando e antecipando as primeiras operações com um grande suporte de desenhos ou esquemas, passa à fase em que constrói REPRESENTAÇÕES e, finalmente, alcança um estágio de operações diretamente sobre SÍMBOLOS NUMÉRICOS e ALGÉBRICOS.



- Por outro lado, parece-nos interessante considerar o que significa os estudantes compreenderem o conceito de fração [enquanto composição/decomposição]. Isso implica que saibam resolver corretamente dois tipos de problemas:

1. Aqueles que apresentam a fração como parte de uma unidade (contínuo)

Por exemplo: representar $\frac{2}{3}$ de um retângulo ou um pátio. E, o seu inverso: dado uma região, saber a que parte corresponde do retângulo total.

2. Aqueles que apresentam fração como parte de um conjunto ou de uma coleção (discreto). Por exemplo: separar $\frac{2}{3}$ de um conjunto de 36 bolas. E, o seu inverso: dado um conjunto de 36 bolas dizer que parte corresponde a 24 bolas.

Por isso, acreditamos que, para introduzir o conceito de fração, é indispensável trabalhar com situações dos dois tipos.

FRAÇÕES: SUBDIVISÕES DE FIGURAS PLANAS

O uso de FIGURAS PLANAS para introduzir frações e para trabalhar as operações nos permite, ao mesmo tempo, desenvolver a intuição sobre equivalência de superfícies e a ideia de medida de áreas.

O trabalho sobre POLÍGONOS, além disso, nos dá a vantagem de estudar as frações tanto do ponto de vista de parte de um objeto unitário como do ponto de vista de uma parte de uma coleção. Ou seja, em um triângulo dividido em 36 partes, entender que a quarta parte desse triângulo corresponderá a quatro partes iguais, assim como calcular a quarta parte do conjunto de 36 peças que o integram.

Vejamos a seguir, então, algumas possibilidades que as figuras planas oferecem:

1. POLÍGONOS

MATERIAL:

Polígonos de cartolina divididos em um certo número de partes iguais, com regiões pintadas de diferentes cores como, por exemplo, os das figuras 1a e 1b.

Figura 1a - polígonos "triangulares"

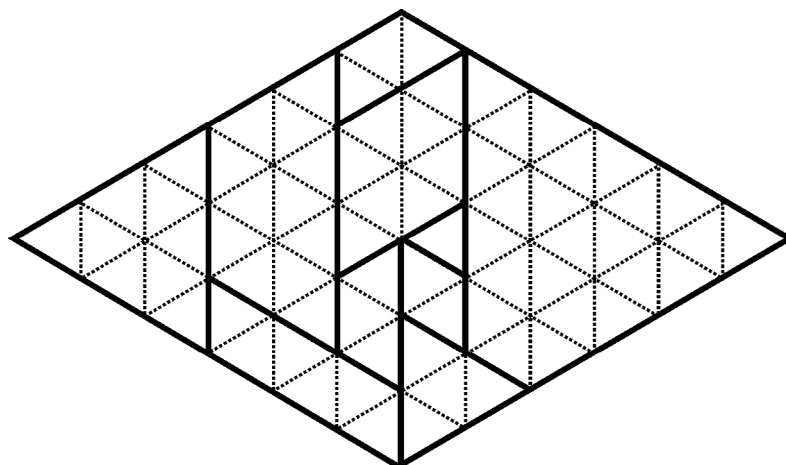
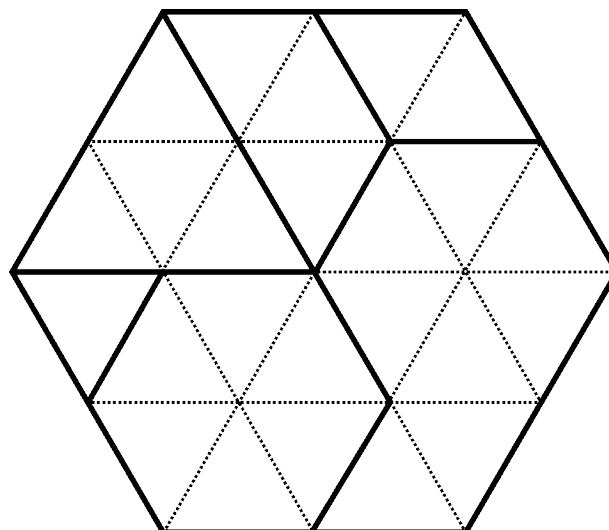
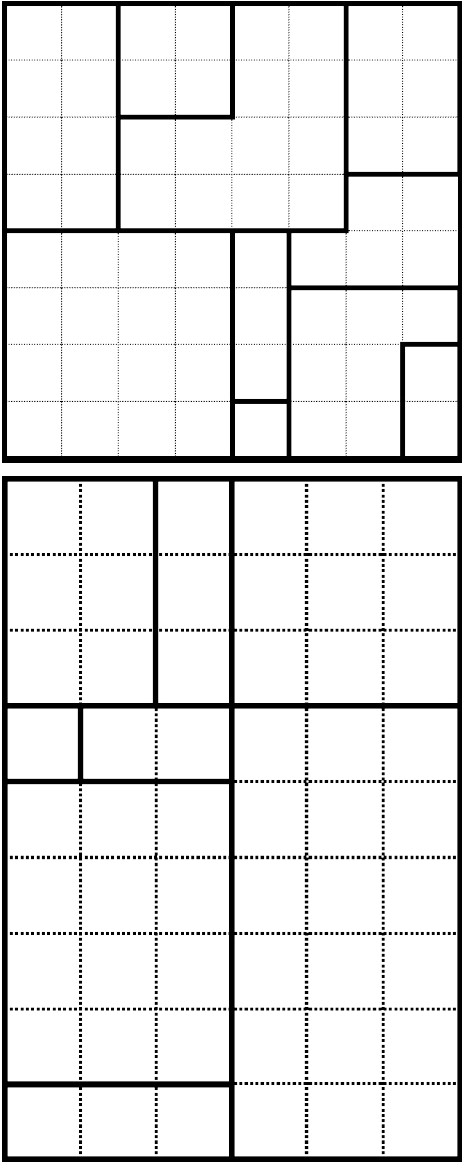


Figura 1b – polígonos retangulares

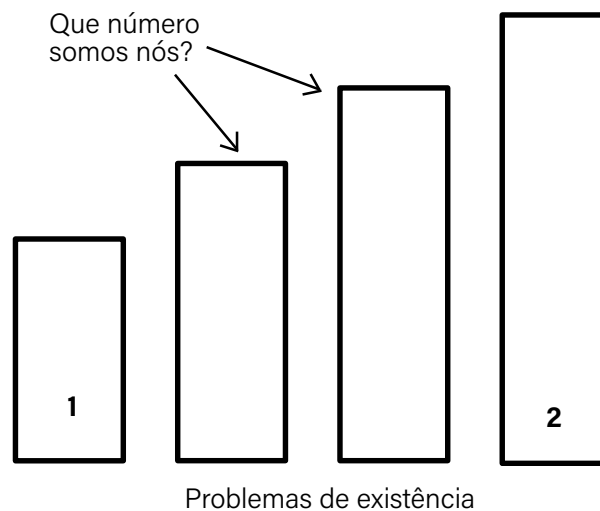


OBJETIVOS:

- Reforçar o conceito de frações como parte de um todo.
- Observar as diferentes partes da unidade e saber expressá-las simbolicamente. O polígono composto pode representar a unidade.
- Trabalhar o cálculo mental.

METODOLOGIA:

Apresentaremos cada material separadamente para que fique mais claro, em vez de repetir teoricamente os exercícios que já foram expostos anteriormente.



J5 - TRIÂNGULOS

Qual triângulo adotar?

Para obter o máximo de possibilidades com um mínimo de material, adotamos o número 36, que:

- é a soma dos oito primeiros números naturais:
 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.
- nos oferece 9 divisores para jogá-los como denominadores:
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36. Como construí-lo?

Construa um triângulo (equilátero) como o da Figura 2a a seguir.

Figura 2a

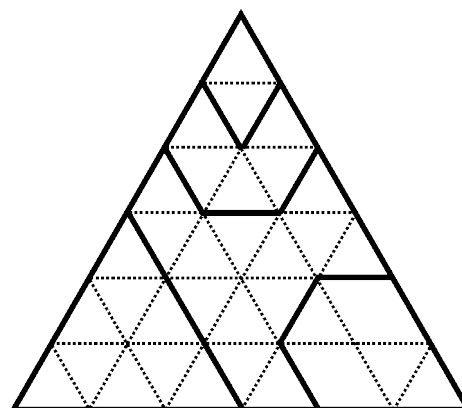
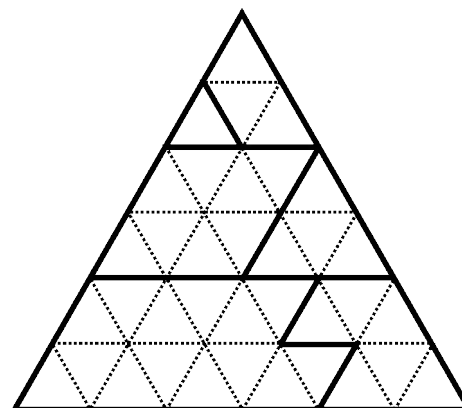


Figura 2b



Pinte as peças $1/36$, $2/36$, $3/36$, $4/36$, $5/36$, $6/36$, $7/36$ e $8/36$ como indicado na Figura 2b acima, cada uma de uma cor.

O fato de que a fração com $1/4$ ($9/36$) não pode ser representada por uma única peça convexa é um inconveniente que solucionamos construindo outro triângulo como o da Figura 3, que amplia as possibilidades de trabalho. A Figura 4 ilustra outra possibilidade.

Figura 3

$$2/36 + 5/36 + 7/36 + 9/36 + 13/36 = 36/36$$

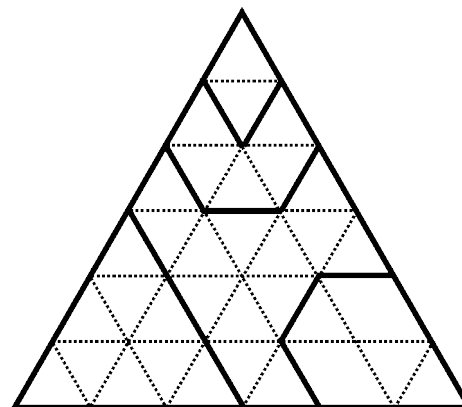
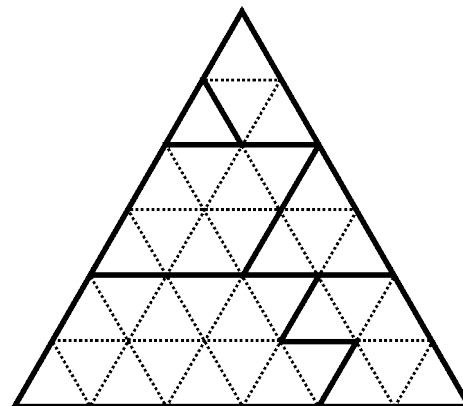


Figura 4

$$1/36 + 3/36 + 4/36 + 6/36 + 8/36 + 14/36 = 36/36$$



METODOLOGIA:

Ao apresentar os triângulos, chamar a atenção desde o início que a menor parte representa $1/36$. Pode ser conveniente apresentar o triângulo unitário (sem as peças) ou separações, como na Figura 2a.

1. Identificação da cor/fração (primeiro nível).

Fig. 2 – Qual parte (fração) corresponde ao vermelho?

Fig. 3 – Qual parte (fração) corresponde ao marrom?

Fig. 2 – Qual parte (fração) corresponde ao lilás?

Fig. 4 – Qual parte (fração) corresponde ao amarelo?

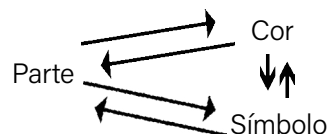
2. Identificação da fração cor (primeiro nível).

- a. Existe alguma cor que represente a metade? b) Caso a resposta seja “não”, como obteríamos?

Por exemplo: Juntando as duas peças de $1/4$ da figura 3.

3. Identificação cor → fração (segundo nível).
 - a. Que fração representa o preto?
 - b. Quantos pretos correspondem ao cinza?
 - c. Qual fração corresponde à parte cinza? (Por exemplo: $2/12$ ou $1/6$)
 - d. Obs.: Notem que as comparações vão aumentando o surgimento de novos denominadores.
 - e. Frações equivalentes.
4. Fazendo referência ao que já descobriram e registraram nas comparações anteriores.
5. Identificação fração → cor (segundo nível); soma de frações.
 Estabelecer relações de equivalência e de somas, tanto de cores quanto de símbolos. Exemplos:
 Verde = Preto + Vermelho ou $1/12 + 1/9$
 Lilás = 2 vermelhos ou $1/9 + 1/9$ ou $2 \times 1/9$
6. Cálculo Mental

Analisar cada passo do esquema:



J6 - HEXÁGONOS

MATERIAL:

- Fichas para recortar e colorir, em diferentes subdivisões do hexágono (Figura 5).
- Um hexágono de cartolina, maior que os desenhos e sem as divisões que lhe partam.
- Uma coleção de peças de diversas formas representando partes do hexágono feitas com a mesma medida que o de cartolina (dos tipos dos desenhados na Figura 6).

METODOLOGIA:

- No primeiro contato com o material (cortar, colorir etc.), é conveniente estabelecer um vocabulário, e devem ficar claras algumas noções:
 - A grandeza da peça varia inversamente com o denominador.
 - A unidade possui uma expressão (relação) com cada um dos denominadores.
- Trabalhar equivalência a partir de algumas frações que eles já conhecem ($1/2$, $1/4$, $1/3$, $3/4$, ...). Por exemplo, para representar $1/2$, é claro que temos três situações:
 - a. Nas Figuras a, b, c, e, g, h, temos as metades do hexágono desenhadas claramente, já que podem dobrar uma linha que divide claramente o hexágono em duas partes iguais.
 - b. Na Figura d, não há nenhuma linha que forneça uma divisão clara do hexágono em duas partes iguais. Temos que calculá-la a partir da consideração que temos seis partes iguais

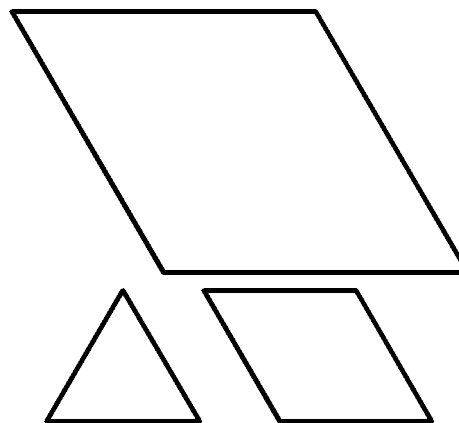
e que $1/2$ de 6 são 3 (fique claro que não é evidente, do ponto de vista intuitivo, que escolher quaisquer três regiões que compõem o hexágono corresponde à metade do hexágono).

- c. Na Figura f, pelos raciocínios a ou b, não se chega a encontrar $1/2$, já que o hexágono está dividido em 9 polígonos; A partir das subdivisões que estão desenhadas, não é possível construir $1/2$.

- Dado uma figura de cartolina da coleção, encaixá-la dentro do hexágono unidade.

É necessário identificar o perfil de alguns dos desenhos da ficha, escolhendo o melhor deles para saber que fração do hexágono unidade representa a peça.

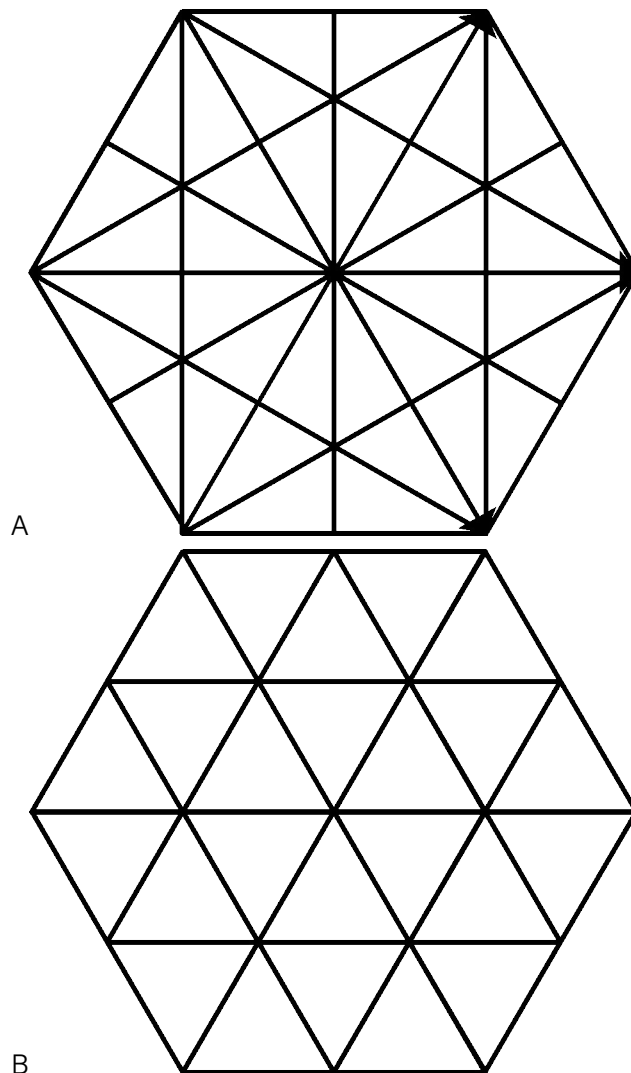
Exemplo: Que parte do hexágono corresponde à região desenhada nas figuras abaixo? Nesse caso, a grandeza da figura é da mesma ordem que a dos hexágonos pequenos, para facilitar a visualização e cálculo do leitor .



Os cortes dentro dos hexágonos podem coincidir com a silhueta do ângulo obtuso. Dessa forma, os modelos A, B, E, G seguintes podem ser usados para identificá-la. A resposta será: $12/36$, $8/24$, $4/12$ e $6/18$, respectivamente. Note-se a relação de equivalência.

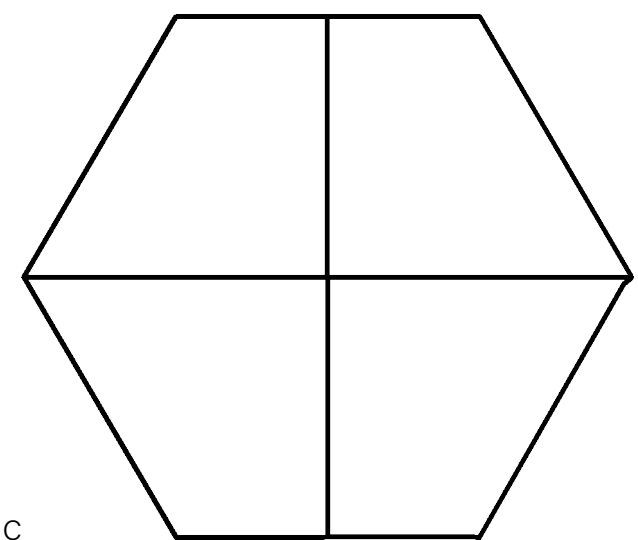
- É possível ampliar o trabalho à soma de frações de maneira semelhante aos jogos descritos anteriormente.

Figura 5a

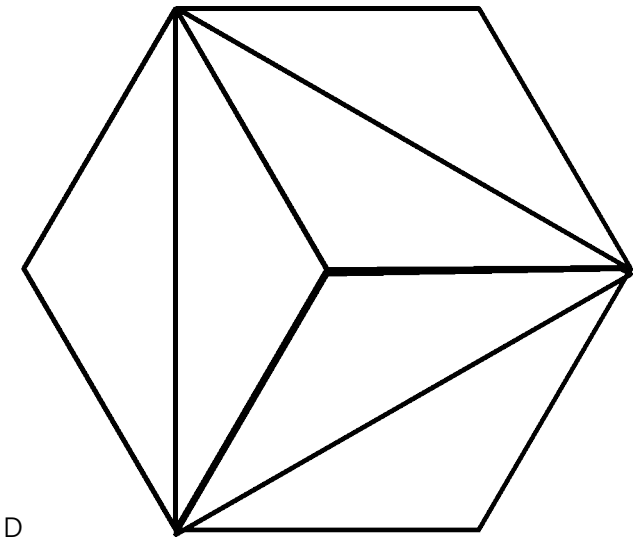




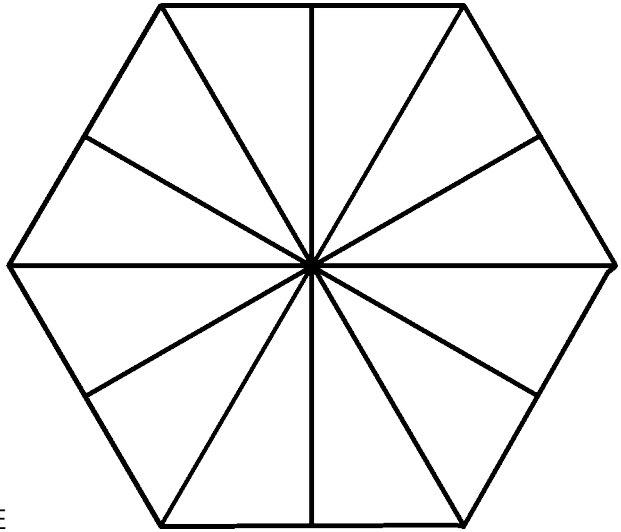
SUMÁRIO



C

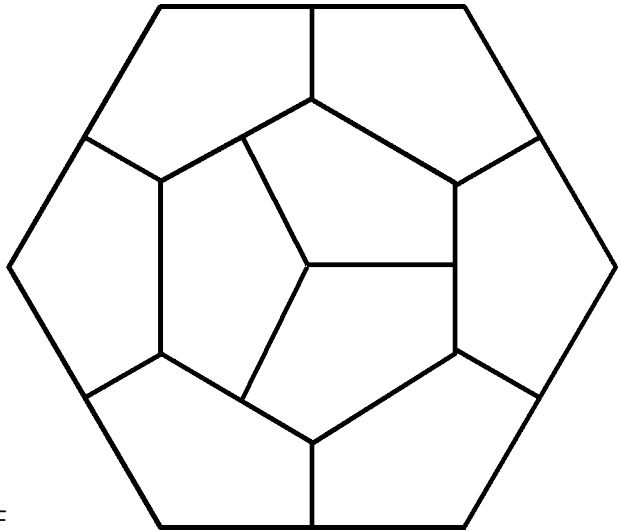


D

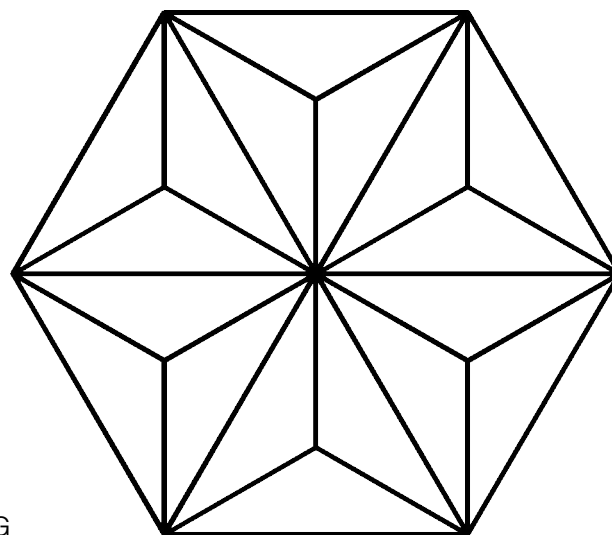


E

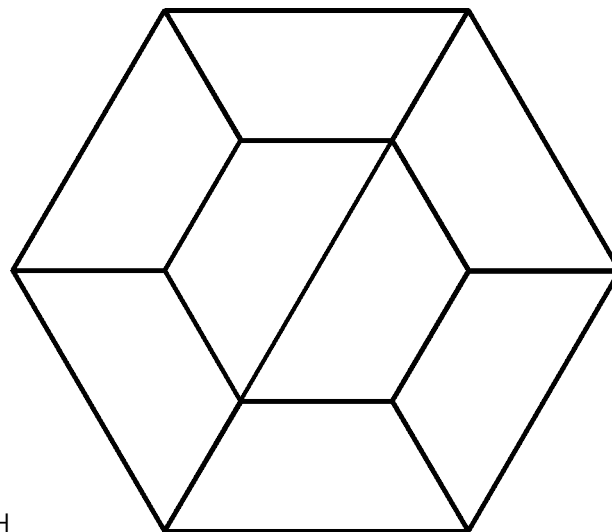
Figura 5b



F

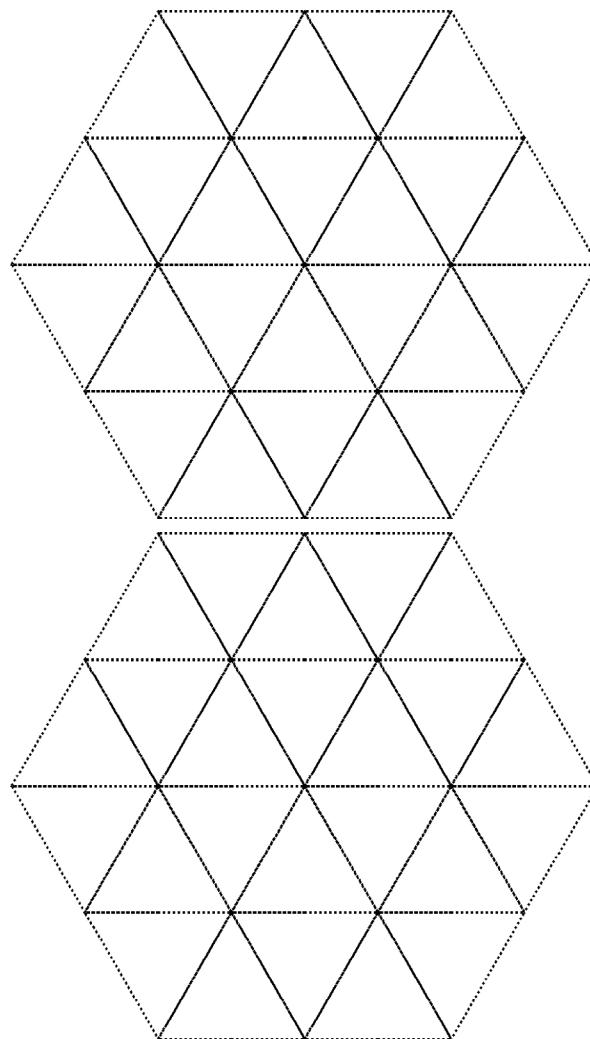


G



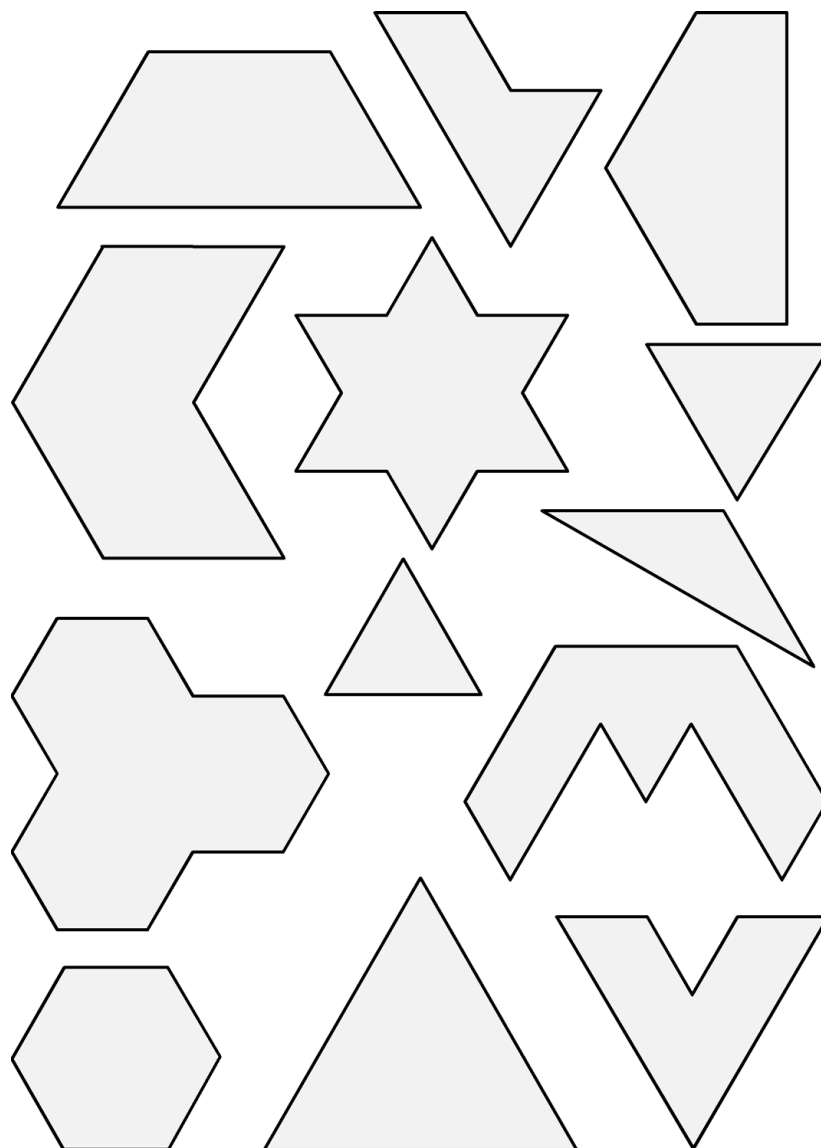
H

Crie suas próprias peças.



Qual a área destas figuras?

Figura 6



TANGRAMS

Ainda que as ideias destes materiais sejam semelhantes às dos materiais anteriores, algumas atividades que propõem implicam uma mecânica de proporcionalidade direta. Ou seja, compreender que 1,5 de 5 é o mesmo que 3 de 10. Um dos recursos que nos permite trabalhar a composição/decomposição, bem como a proporcionalidade é o TANGRAM. Veja exemplos.

J7 - TANGRAM TRIANGULAR

MATERIAL:

- Tangram triangular de 8 elementos de Jaume Llibre (vide figura 8).

Observando o triângulo formado pelas 8 peças, percebe-se que as suas medidas guardam uma relação: todas elas podem ser decompostas num determinado número de triângulos todo iguais, com a particularidade que não há duas peças que sejam formadas pela mesma quantidade de triângulos (ou da mesma forma). Isso é uma característica da família dos TANGRAMS.

METODOLOGIA

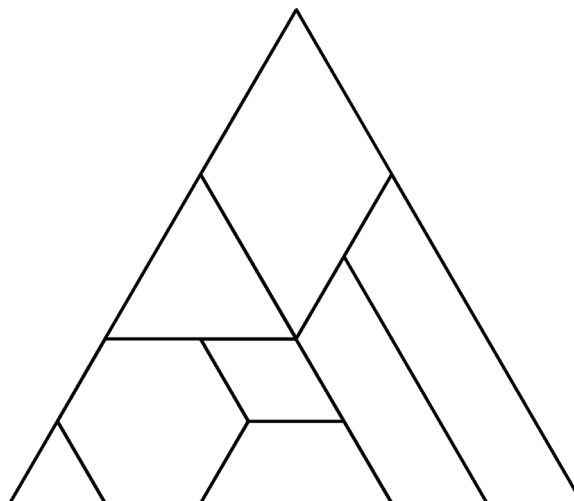
- Para trabalhar as partes da unidade, considere o conjunto das 8 peças como unidade e busque que parte representa cada uma dessas peças.

Por exemplo: O menor triângulo é $1/36$; o hexágono é $1/6$; o losango maior é $2/9$ etc. Em seguida, podem ser feitas equivalências, somas etc.

- Um segundo passo será considerar cada peça como unidade e verificar que fração representa cada uma das outras em relação a “nova” unidade, trabalhando os mesmos conceitos anteriores.

Figura 8

$$1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 7/36 + 8/36 = 36/36$$

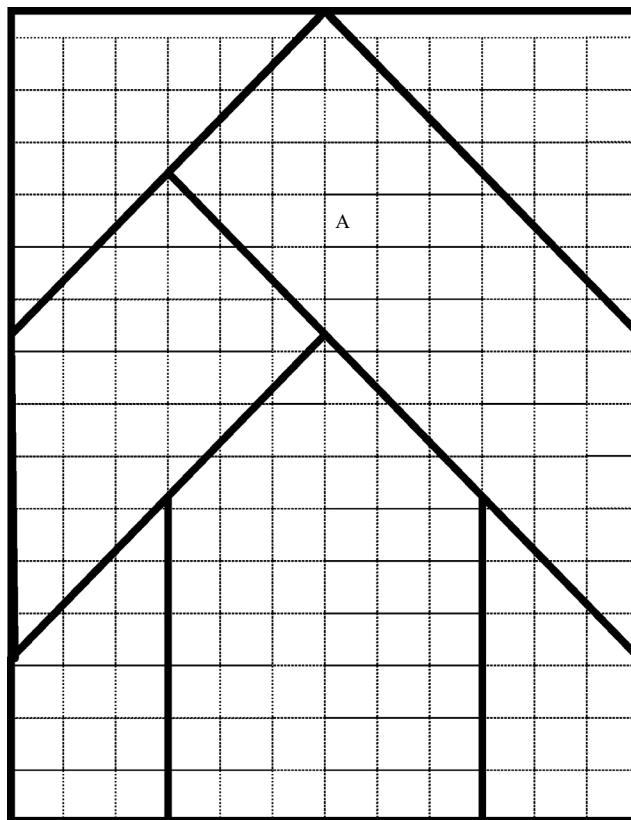


J8 - TANGRAM RETANGULAR DE 7 PEÇAS

Com este Tangram, é possível seguir o mesmo procedimento anterior. Porém, levando em consideração que não há nenhuma peça que contenha uma outra peça em um número inteiro de vezes. Assim, o triângulo está contido duas vezes e meia na região da Figura 9.

Trabalhar com este Tangram requer algum conhecimento de proporcionalidade. Por isso, devemos trabalhar com outros tipos antes deste.

Figura 9



Obs. Escolhendo um quadrado da malha quadrada como unidade ou uma das peças, podemos estabelecer as várias relações entre as áreas das peças.

J9 - TANGRAM CHINÊS ORIGINAL

As mesmas propostas podem ser estabelecidas com este incrível jogo de origem chinesa, com a vantagem de ser inumerável a quantidade de figuras que podemos formar com um número variado de peças.

Adotando o quadrado formado como unidade de medida de área, temos: $2 \times (1/16) + 3 (2/16) + 2 (4/16) = 16/16$

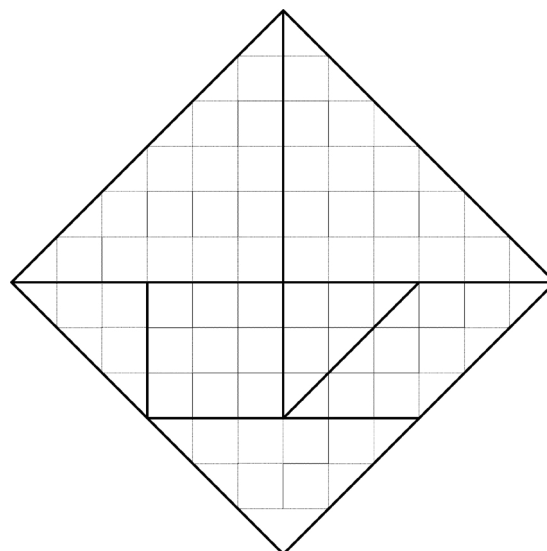
em que:

$1/16 =$ menor peça triangular.

ATIVIDADE:

- Forme várias figuras com uma quantidade diferente de peças, mas com, no máximo, 7 peças, e encontre as que possuem áreas equivalentes.

Figura 10



J10 - USO DE QUADRICULADOS

MATERIAL:

- Cartões (de diferentes cores) de forma retangular e mesmo tamanho “quadriculados” (divididos em quadrados) em partes iguais: 16, 42, 48, 54, 60, 72, 96 etc. De acordo com a quantidade de partes que possui, deverá pintá-los de cores diferentes. Por exemplo, os verdes possuem 36 divisões; os vermelhos, 54 etc.

Para trabalhar este conceito, consulte o livro de N. Picard, “Itinerário Matemático”, vol: I, II e III, Ed. Teide.

METODOLOGIA:

- Cada estudante ou grupo terá um cartão diferente e uma folha para anotar em forma de “máquina” o que irá realizar, comprovando os cálculos que realizar. Deverá anotar (gráfica, numérica e simbolicamente) as dimensões do cartão.
- Peça aos estudantes que possuem o cartão 36 ou 48 ou outro qualquer que tenham recebido, que calculem os $(3/4)$ de seu cartão. Registrando em sua folha:

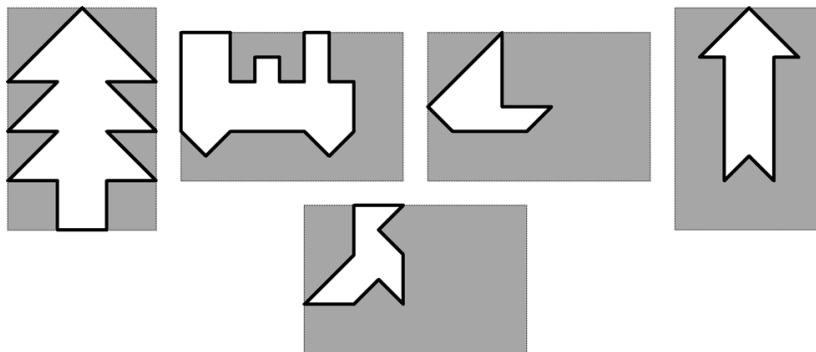
$$36 \times (3/4) =$$

$$48 \times (3/4) =$$

Obs.: Cabe destacar que o estudante deverá pensar em dois níveis. Primeiro, encontrando as $(3/4)$ partes do objeto e, depois, contando quantos quadrados contém.

MATERIAL ADICIONAL:

- Figuras recortadas em cartolina, correspondendo a alguma fração dos cartões retangulares, como as ilustradas a seguir.



Essas figuras devem poder ser encaixadas sobre os cartões. As questões relacionadas podem ser do tipo: que parte do cartão ocupam ou de ordenação entre elas.

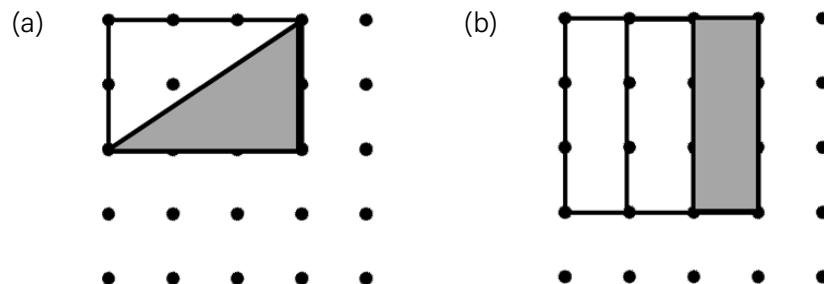
J11- GEOPLANO

O uso de geoplanos ou papel pontilhado (quadriculado e triangular) pode ser um excelente instrumento para atividades envolvendo área e perímetro. A seguir, indicamos algumas atividades.

- Construir, num geoplano de 5 x 5, uma figura que possa ser dividida em duas partes iguais, mediante um segmento de reta, como na figura abaixo.

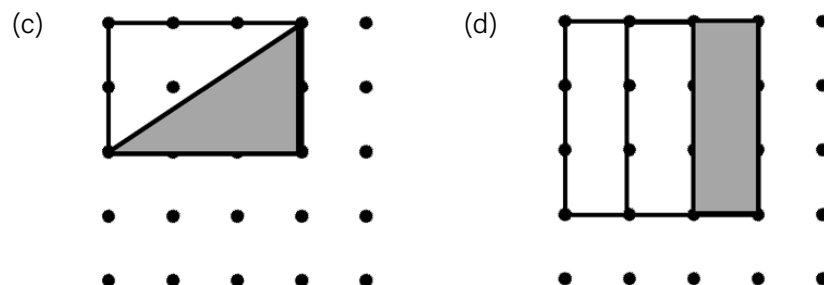
A figura resultante é a metade da construída, ou melhor, $(1/2)$ da figura construída.

Uma expressão da forma $(1/2)$ é chamada de fração, na qual 1 é o numerador; e 2, o denominador.



2. Construir no geoplano uma figura que possa ser dividida em 3 partes iguais (ou de área equivalente) como na Figura (b). Cada parte é um "terço" ou $1/3$ da figura construída. Construir outras figuras e dividi-las cada uma delas em três partes iguais (ou equivalentes em área).

3. Construir no geoplano uma figura que possa ser dividida em 4 partes iguais (ou equivalentes em área) como na Figura (c). Cada parte é "um quarto" ou $1/4$ da figura construída. Construir outras figuras e dividi-las em quatro partes iguais (ou equivalentes em área). Se necessário, usar um geoplano maior.



4. De forma análoga às atividades anteriores, construir figuras no geoplano de forma que possa obter: "quintos" ($1/5$); "sextos" ($1/6$); sétimos ($1/7$), oitavos ($1/8$) etc.

5. No geoplano circular, construir um dodecágono regular e, a partir desse, obter as seguintes frações: $(1/2)$; $(1/4)$; $(3/6)$; $(6/12)$.

Verificar se todas as figuras resultantes possuem a mesma superfície. Quando isso ocorre, dizemos que as frações são equivalentes ou que "operam" sobre a figura original da mesma forma. Escreveremos, então: $(1/2) = (2/4) = (3/6) = (6/12)$
 $= (1 \times n)/(2 \times n)$

6. Com a mesma figura anterior, encontrar as frações que sejam equivalentes a $(2/3)$. Analogamente para $(3/4)$.
7. Construir figuras no geoplano para comprovar se são equivalentes às seguintes frações:

(a) $(2/3)$ e $(5/6)$

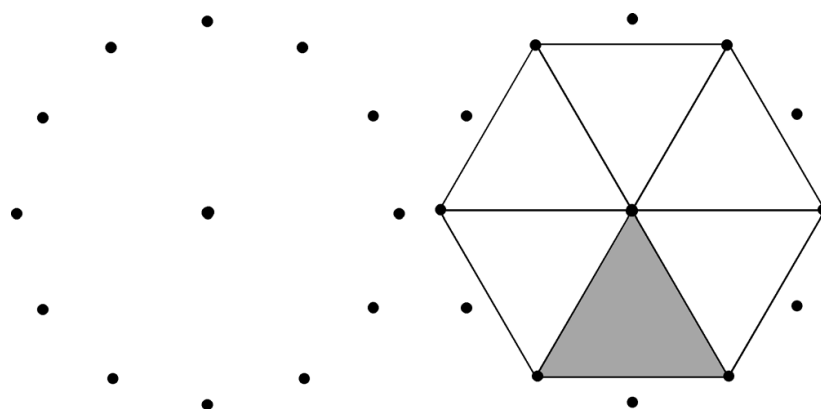
(b) $(3/5)$ e $(15/20)$

(c) $(5/8)$ e $(10/16)$

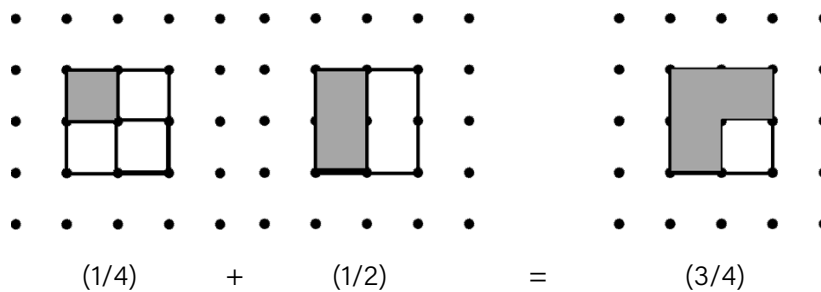
Quando não forem equivalentes, diga qual é a maior.

8. Sobre o geoplano circular de 12 pontos, construir figuras que possam ser decompostas em partes iguais. Por exemplo, o hexágono regular. Destas figuras, se possível, obter: sua metade, seu terço, seu quarto, seu sexto, seu oitavo, seu doze avos.

Em cada caso, ordenar da menor a maior as frações que pode obter.

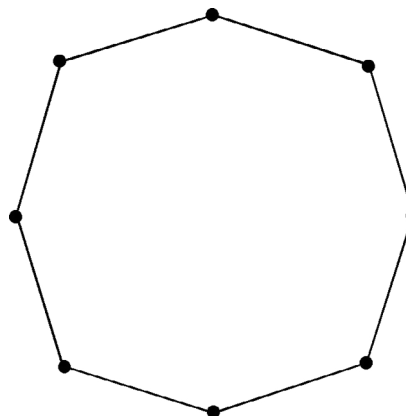


Obs.: A adição de frações pode ser representada no geoplano como adição de superfícies. Por exemplo:



9. Construir um octógono regular no geoplano circular de 24 pontos e representar graficamente a soma de seus dois quartos mais seu quarto.

$$(1/4) + (2/4)$$



10. Construir um hexágono regular e somar seus três sextos com seus dois sextos.

$$(3/6) + (2/6)$$

Nas atividades anteriores, as frações tinham denominadores comuns, o que torna o resultado da soma mais fácil de ser visualizado e calculado. Vejamos, agora, outros casos.

11. Some a metade de um hexágono regular com seu terço.

$$(1/2) + (1/3) = ?$$

12. Some o terço de um dodecágono regular com seu quarto.

$$(1/3) + (1/4) = ?$$

Nas atividades anteriores, poderá observar que a soma fica "fácil" se reduzirmos as frações a outras frações equivalentes com o mesmo denominador.

13. Resolva, com ajuda do geoplano, as seguintes somas:

$$(2/3) + (1/4) =$$

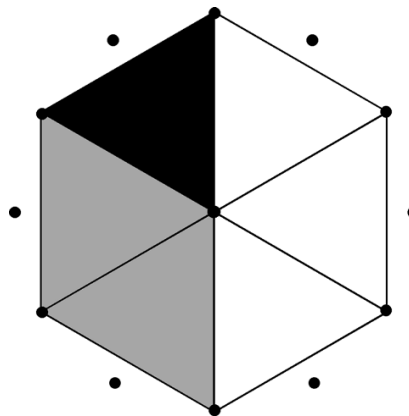
$$(3/4) + (2/5) =$$

$$(1/2) + (2/3) + (3/4) =$$

14. Construa, no geoplano circular, a metade de um hexágono regular e, dessa figura resultante, encontre o seu terço.

Qual fração do hexágono regular este resultado representa?

$$(1/2) \times (1/3) =$$



15. Da mesma forma que a questão anterior, da metade de um quadrado, obtenha sua metade. Dos dois terços de um dodecágono regular, obtenha a sua quarta parte. Dos dois sextos de um hexágono regular, obtenha sua metade.

a. $(1/2) \times (1/2) =$

b. $(2/3) \times (1/4) =$

c. $(2/6) \times (1/2) =$

16. Observando os resultados das questões 14 e 15, você consegue descrever uma regra para multiplicar frações (numericamente)?

FRAÇÕES E JOGOS DE AZAR

OBJETIVOS:

- Trabalhar equivalências.
- Agilizar o cálculo de partes de uma coleção.
- Introdução ao cálculo de somas.

A) Dominós

O jogo de dominó, com as fichas fracionárias que apresentam, oferece ao estudante o desenvolvimento de sua agilidade de cálculo e prática no manejo desses números.

O estudante deverá relacionar os gráficos conhecidos das áreas das figuras simples com as frações correspondentes (visualização).

MATERIAL:

As fichas podem ser construídas refletindo duas ideias centrais. Cada ideia pode ser trabalhada em diferentes níveis de dificuldade, de acordo com os objetivos.

1. Quanto à **representação gráfica** que aparece nos desenhos:
 - a. com a mesma percepção visual (a fração $(1/4)$, por exemplo, é sempre representada da mesma maneira). Mesma coleção ou mesma figura.
 - b. com diferentes percepções visuais (diferentes coleções ou figuras).
2. Quanto à **simbologia**:
 - a. utilizando apenas frações irredutíveis [o racional $(1/4)$ só aparece em fichas como $(1/4)$].
 - b. utilizando equivalências [o racional $(1/4)$ também aparece como $(2/8)$, $(3/12)$, $(4/16)$, $(5/20)$ etc].

Como modelo, apresentaremos alguns jogos construídos segundo essas orientações.

METODOLOGIA:

Consiste unicamente em se jogar com as regras habituais do dominó.

Vale a pena ressaltar que os jogos combinam representações gráficas e simbólicas (numérica) e que cada jogador pode emparelhar um gráfico com um símbolo (e vice-versa) e que não é permitido justapor símbolo com símbolo ou desenho com desenho.

J12 - DOMINÓ DE IDENTIFICAÇÃO SIMPLES - PARTE DE UMA UNIDADE

QUADRADO: $(1/1)$ - $(3/4)$ - $(1/2)$ - $(1/4)$

MATERIAL:

Fichas com duas partes, como no dominó, que dispõem de um lado uma representação gráfica de uma figura. Nela temos uma superfície marcada. Em todos os casos a parte escura (preta) é o que representa o valor da figura. No outro lado da peça, temos uma expressão simbólica.

16 fichas dispoño de um lado a representação gráfica das frações simples de um quadrado: total (unidade), metade, quarta parte e três quartas partes. No outro lado, temos as frações irredutíveis.

OBJETIVOS:

- Relacionar os gráficos conhecidos das áreas de figuras simples com as frações correspondentes (visualização).
- Identificar frações como partes de uma unidade e a fração $(1/1)$ como representando a unidade inteira.
- Num segundo nível, mecanizar somas de inteiros, metades e quartos.

METODOLOGIA:

- Número de jogadores: de 2 a 4 estudantes.
- Nível de utilização: introdução da fração como parte da unidade (9-10 anos).
- Procedimento:

Repartir as fichas entre os jogadores.

Joga respeitando as regras habituais do dominó, com uma única ressalva:

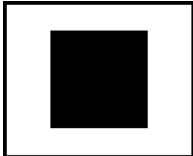
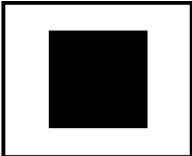
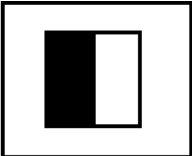
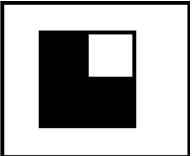
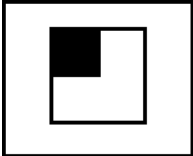
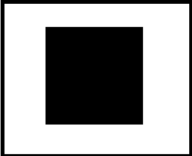
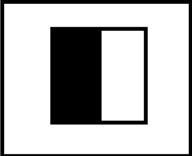
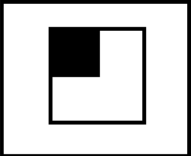
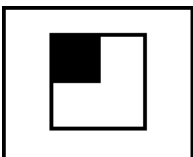
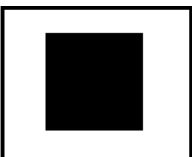
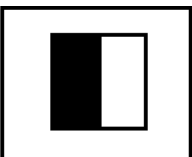
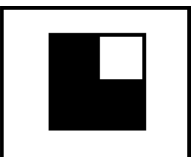
Cada jogada deve combinar representação gráfica com representação simbólica e não vale justapor símbolo com símbolo nem desenho com desenho.

Vence quem primeiro ficar sem fichas.

Caso o tabuleiro fique “truncado”, ou seja, nenhum jogador podendo dar continuidade, vence quem:

- tiver o menor número de peças nas mãos.
- tiver a menor soma de frações das peças em suas mãos.

			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
			
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$

Composição das peças:

inteiro	4 vezes desenho + 4 vezes símbolo
três quartos	4 vezes desenho + 4 vezes símbolo
metade	4 vezes desenho + 4 vezes símbolo
um quarto	4 vezes desenho + 4 vezes símbolo

Obs.: Caso queira tornar o jogo um pouco mais demorado, pode duplicar o número de peças.

J13 - DOMINÓ DE IDENTIFICAÇÃO SIMPLES - PARTE DE UMA UNIDADE

CÍRCULO $(1/1)$ - $(3/4)$ - $(1/2)$ - $(1/4)$

MATERIAL:

Fichas com duas partes, como no dominó, que dispõem de um lado uma representação gráfica de uma figura com uma superfície marcada. Em todos os casos, a parte escura (preta) é o que representa o valor da figura. No outro lado da peça, temos uma expressão simbólica.

16 fichas dispondo, de um lado, a representação gráfica das frações simples de um círculo: total (unidade), metade, três quartas partes e uma quarta parte e, no outro lado, as frações irredutíveis.

OBJETIVOS

- Identificar frações como partes de uma unidade e a fração $(1/1)$ como representando a unidade inteira.
- Num segundo nível, mecanizar somas de frações.

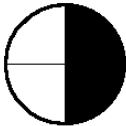
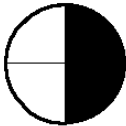
METODOLOGIA:

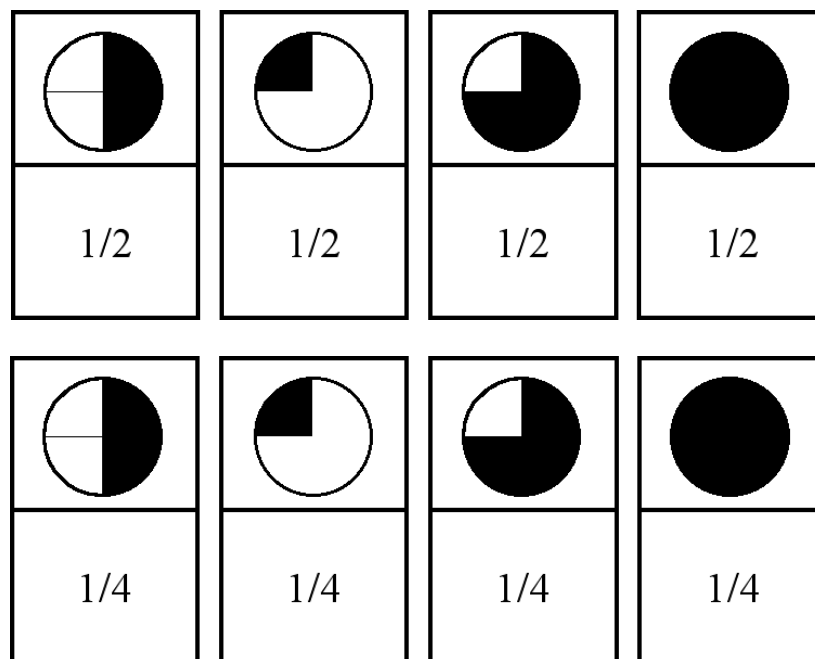
- Número de jogadores: de 2 a 4 estudantes.
- Nível de utilização: introdução da fração como parte da unidade (9-10 anos).

PROCEDIMENTO:

Idêntico ao J12 (Quadrado).

Obs.: Aqui fica claro que cada representação simbólica forma uma peça com todas as representações gráficas. Por exemplo: $(1/2)$ faz "par" com os desenhos que expressam geometricamente $[(1/1), (1/2), (3/4), (1/4)]$.

			
$1/1$	$1/1$	$1/1$	$1/1$
			
$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$



J14 - DOMINÓ DE IDENTIFICAÇÃO SIMPLES

PARTE DE UMA COLEÇÃO - (1/1) - (1/2) - (1/3) - (2/3)

MATERIAL:

- 16 fichas que possuem num lado uma coleção de 6 círculos, alguns dos quais pintados de preto, que representam uma fração do total de bolinhas: total, metade, terça parte e duas terças partes. No outro lado, temos as frações irredutíveis correspondentes.

OBJETIVO:

- Identificar frações como parte de uma coleção e a totalidade como a fração unidade.
- Num segundo nível, mecanizar as somas de frações.

NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

- Início do processo de mecanização da fração como parte da coleção (10-11 anos).

METODOLOGIA:

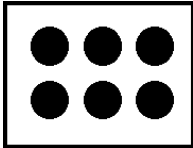
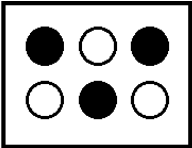
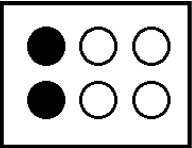
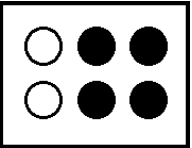
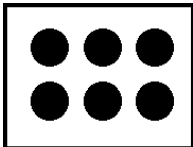
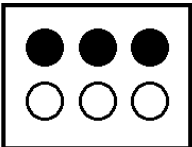
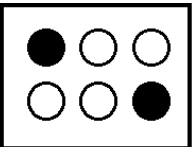
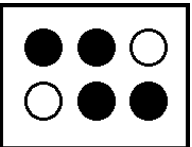
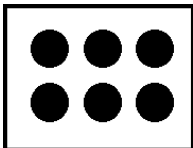
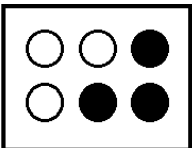
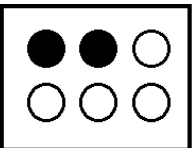
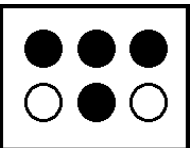
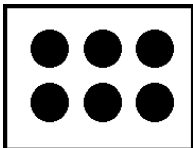
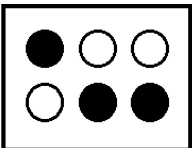
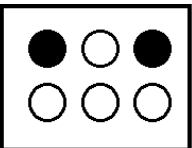
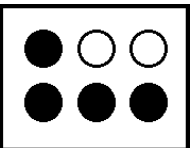
- Idêntica aos casos anteriores (J12 e J13).

Obs.: Escolheu-se um inteiro (6) com divisores: 1, 2, 3, 4 e 6.

Adotando-se os últimos divisores como denominadores, temos: $(6/6)$; $(3/6)$; $(2/6)$ e $(4/6)$

Para cada um destes desenhos, formamos quatro peças combinando cada uma delas com os quatro símbolos correspondentes: $(1/1)$; $(1/2)$; $(2/3)$ e $(1/3)$.

Pode-se tentar encontrar outros inteiros que permitam montar um dominó com estrutura semelhante.

			
$1/1$	$1/1$	$1/1$	$1/1$
			
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
			
$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$
			
$2/3$	$2/3$	$2/3$	$2/3$

J15 - DOMINÓ DE IDENTIFICAÇÃO COM EQUIVALÊNCIA

PARTE DE UMA COLEÇÃO - $(1/1)$ - $(1/2)$ - $(1/3)$ - $(2/3)$ - $(1/4)$ - $(3/4)$

MATERIAL:

- 36 fichas que possuem num lado uma coleção de 12 círculos, alguns dos quais pintados de preto, que representam graficamente uma fração do total de bolinhas: total, metade, terça parte, duas terças partes, quarta parte e três quartas partes. No outro lado, temos essas mesmas frações em forma simbólica ou outras equivalentes facilmente redutíveis.

OBJETIVO:

- Associar a linguagem simbólica das frações com o gráfico.
- Identificar frações equivalentes e simplificar algumas frações.
- Num segundo nível (contabilidade de cada jogador), praticar a soma de frações.

NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

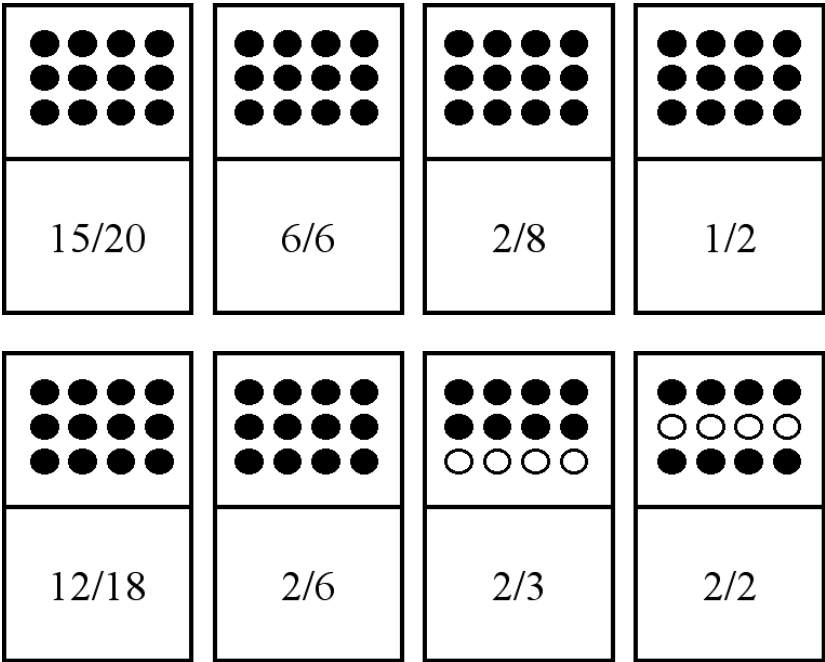
- Introdução das classes de equivalências de frações (11-12 anos).

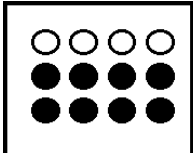
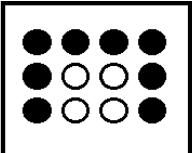
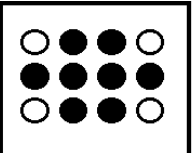
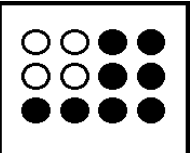
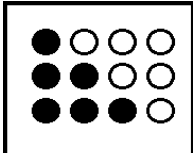
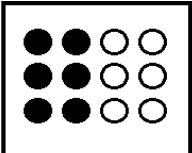
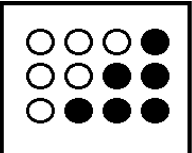
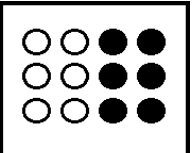
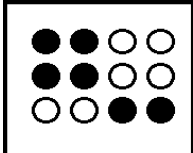
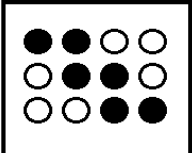
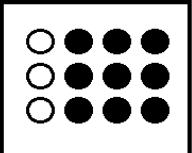
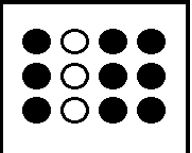
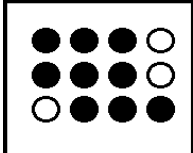
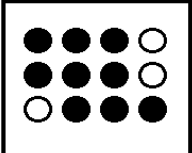
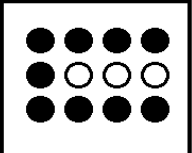
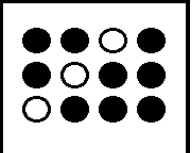
METODOLOGIA:

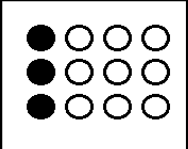
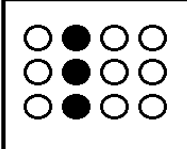
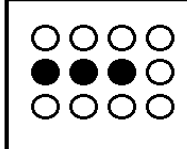
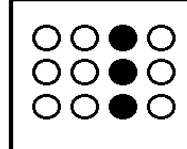
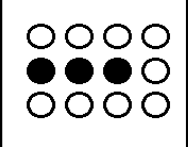
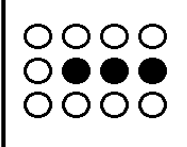
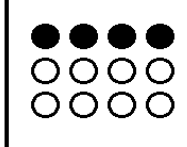
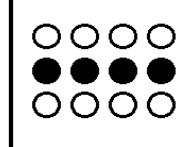
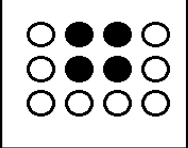
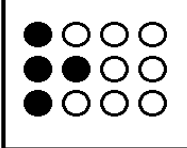
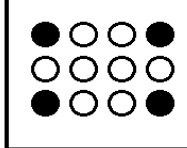
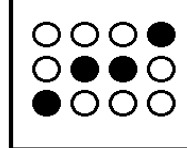
- Idêntica aos casos anteriores (J12 e J13).

Tabela de composição das peças: (1 desenho + 1 equivalência = 1 peça)

desenho -> equivalências	12/12	9/12	8/12	6/12	4/12	3/12
1	6/6	3/3	2/2	4/4	12/12	1 / 1
3 / 4	15/20	75/100	6/8	9/12	3 / 4	12/16
2 / 3	12/18	8/12	2 / 3	10/15	6/9	4/6
1 / 2	1 / 2	5/10	6/12	3/6	2/4	4/8
1/3	2/6	3/9	5/15	1 / 3	6/18	4/12
1 / 4	2/8	1 / 4	5/20	25/100	3/12	4/16



			
$6/12$	$6/8$	$5/15$	$5/20$
			
$10/15$	$3/6$	$25/100$	$4/4$
			
$1/3$	$9/12$	$3/9$	$5/10$
			
$75/100$	$3/3$	$8/12$	$1/4$

			
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{6}$
			
$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
			
$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{6}{9}$

J16 - DOMINÓ DE IDENTIFICAÇÃO COM EQUIVALÊNCIA

PARTE DE UMA COLEÇÃO - $(1/1)$ - $(1/2)$ - $(1/4)$ - $(3/4)$

MATERIAL:

- 16 fichas que possuem num lado uma coleção de 16 círculos, alguns dos quais pintados de preto, que representam graficamente uma fração do total de bolinhas: total, metade, quarta parte e três quartas partes. No outro lado, temos essas mesmas frações em forma simbólica ou outras equivalentes facilmente redutíveis.

OBJETIVO:

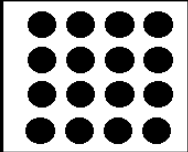
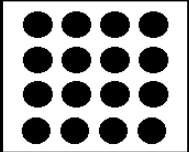
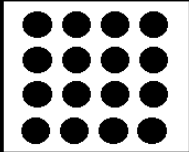
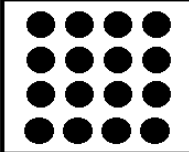
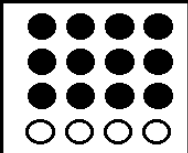
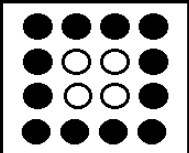
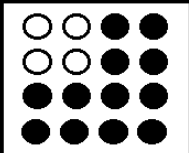
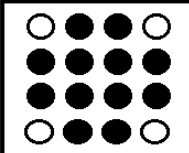
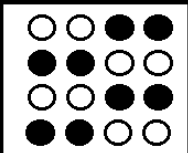
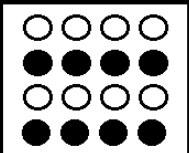
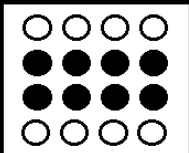
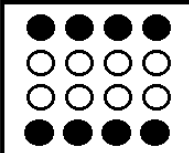
- Associar a linguagem simbólica das frações com o gráfico.
- Identificar frações equivalentes e simplificar algumas frações.
- Num segundo nível (contabilidade de cada jogador), praticar a soma de frações.

NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

- Introdução das classes de equivalências de frações (11-12 anos).

METODOLOGIA:

- Idêntica ao caso anterior (J15).

			
$15/20$	$6/6$	$2/8$	$1/2$
			
$2/2$	$5/20$	$9/12$	$5/10$
			
$2/4$	$6/8$	$25/100$	$4/4$

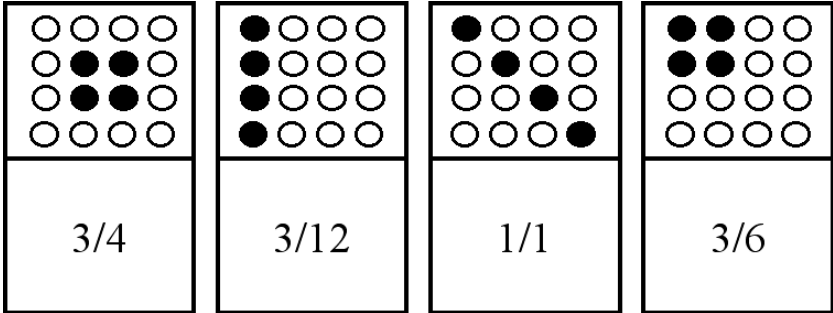


Tabela de composição das peças

desenho símbolo	16/16	12/16	8/16	4/16
1	6/6	2/2	4/4	1/1
$\frac{3}{4}$	15/20	9/12	6/8	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{3}{12}$

J17 - BINGOS FRACIONÁRIOS - IDENTIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

MATERIAL:

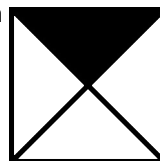
- 24 fichas com as seguintes frações:

$\frac{3}{4}$ [3]	3	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$	2
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{4}$ [2], $\frac{2}{8}$	3
$\frac{5}{8}$	1	$\frac{1}{6}$	1
$\frac{5}{9}$	1	$\frac{1}{8}$ [2]	2
$\frac{1}{2}$ [2], $\frac{2}{4}$ [2], $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$	6	$\frac{2}{9}$	1
$\frac{3}{8}$ [2]	2	$\frac{1}{9}$	1

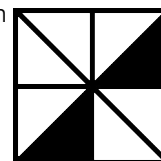
- 4 cartões, cada um contendo a representação gráfica de 6 das frações anteriores.

A mesma figura – um quadrado – é a unidade em todas as representações, e a parte preta corresponde ao valor da fração. A cada fração se associa a representação que permite visualizar seus dois termos: numerador e denominador. Por exemplo:

(1/4) com



e (2/8) com



OBJETIVOS:

- Identificar a representação da fração como unidade.

METODOLOGIA:

- A mesma do jogo de bingo.
- Num estágio posterior, pode-se atribuir uma representação a qualquer fração equivalente. Assim, diversos jogadores podem requisitar uma mesma ficha, se possuem em seu cartão uma representação equivalente. Pega a ficha quem solicitar primeiro.

NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

- Iniciação à ideia de parte de uma unidade (a partir de 9-10 anos).


$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{9}$$

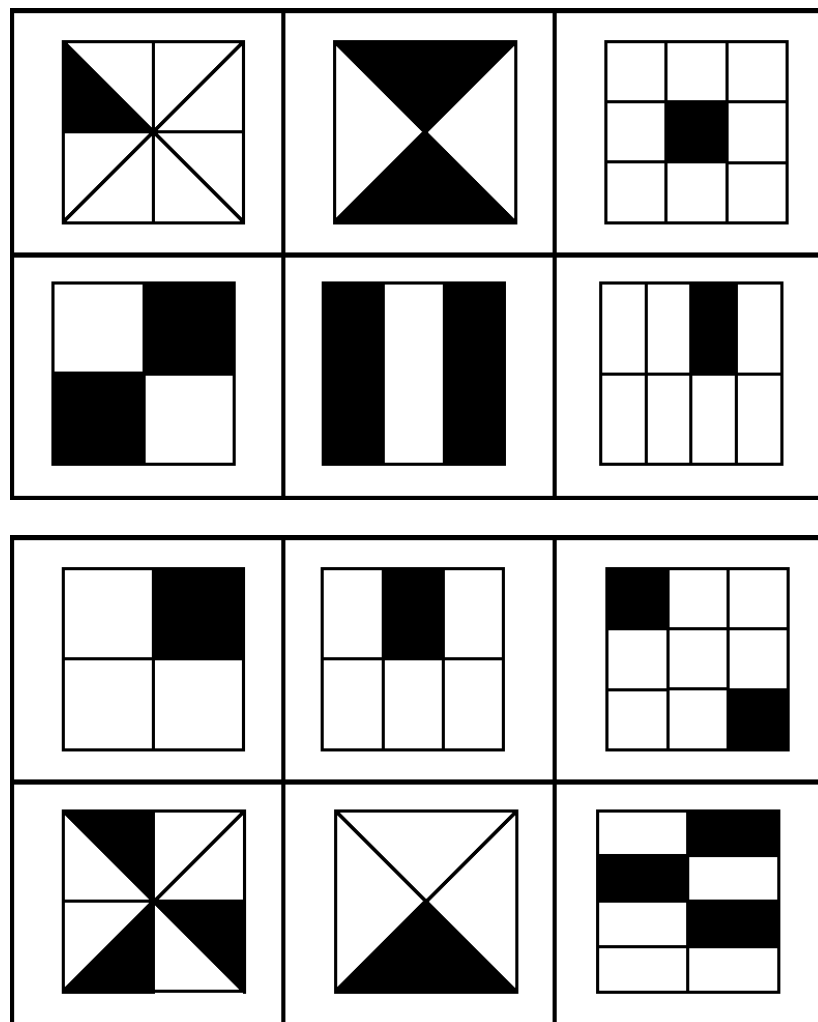
$$\frac{2}{4}$$

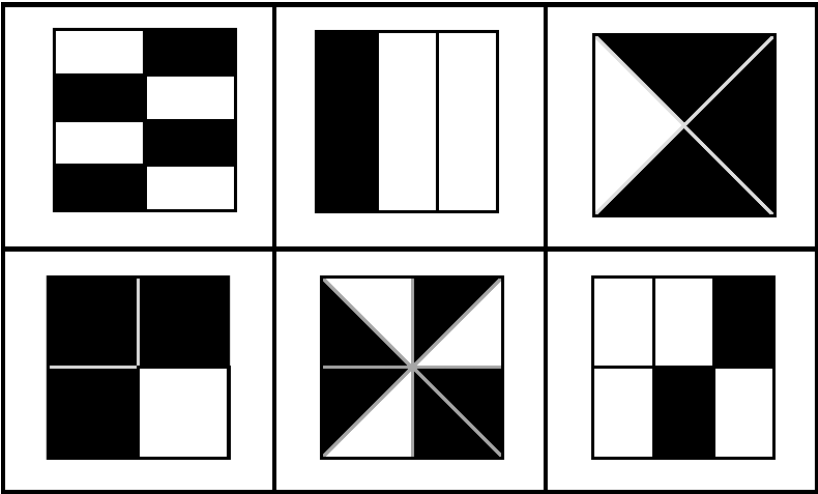
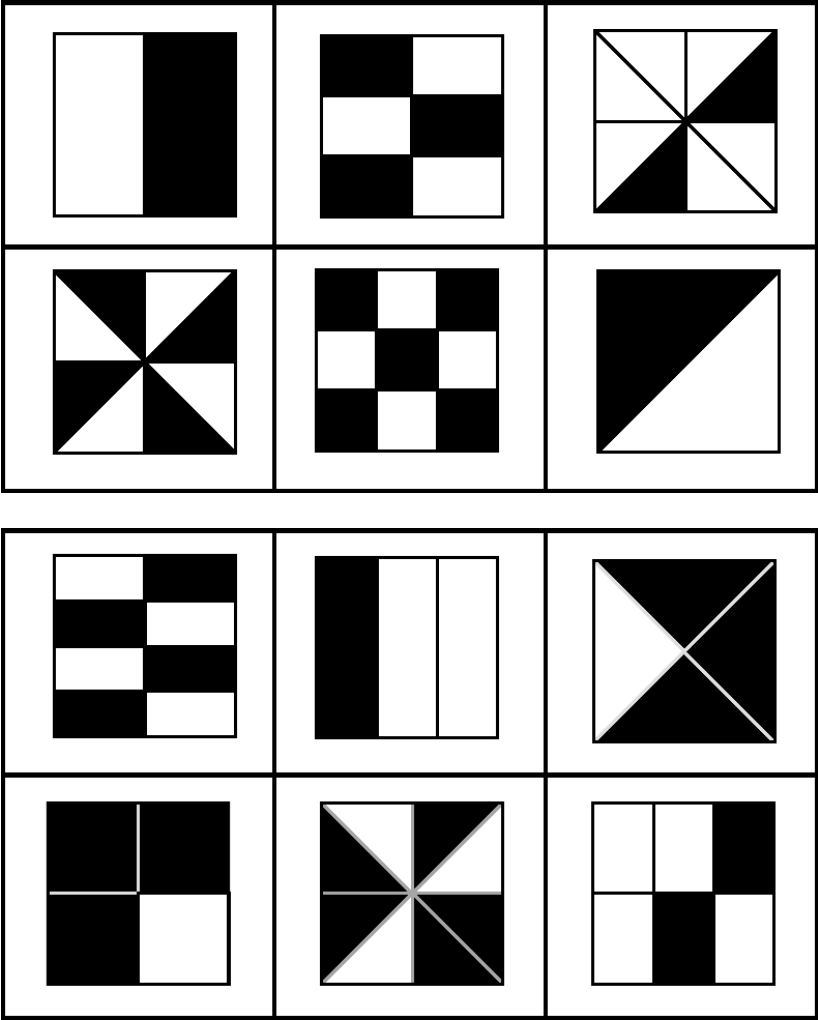
$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{6}$$

$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$





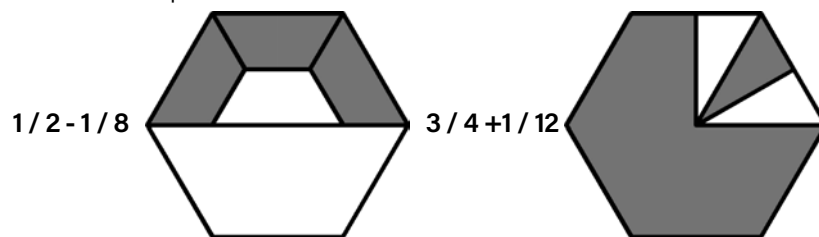
J18 - BINGOS FRACIONÁRIOS - SOMA E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

MATERIAL:

- 24 fichas com somas e subtrações das frações indicadas.
- 4 cartões, cada um com seis representações gráficas dessas operações, tomando como unidade um hexágono regular.

Neste jogo, cada operação foi representada de forma que os dois termos sejam identificados visualmente. Assim, os que possuem as partes sombreadas correspondem a uma adição, e os demais representam subtrações.

Exemplos:

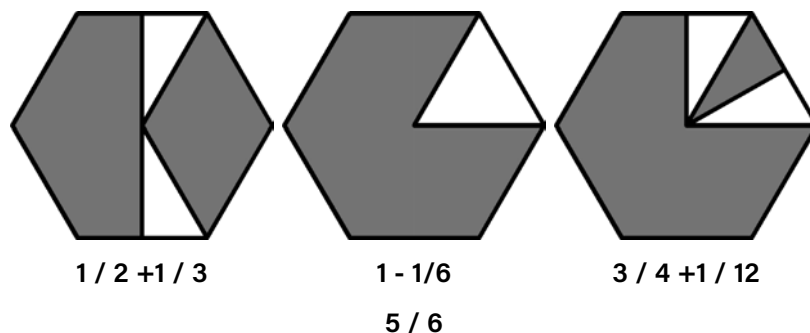


OBJETIVOS:

- Identificar representações de fração como parte de uma unidade.
- Identificar representações de adição e subtração de frações.
- Num segundo nível do jogo, calcular mentalmente os resultados de operações simples.

METODOLOGIA:

- Como todos os bingos (loterias).
- Num segundo nível do jogo, os estudantes podem calcular mentalmente o resultado da operação e atribuir-lhe qualquer das formas que o represente. Observemos num exemplo:



NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

A mecânica para encontrar os resultados das somas e subtrações pode ter como elemento de apoio os cartões coloridos apresentados anteriormente. Esta mecanização deverá ser conhecida se considerarmos um segundo nível do jogo.

Requer o conhecimento prévio de partes/decomposição do hexágono (10-11 anos).

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$$

SUMÁRIO

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$$

SUMÁRIO

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

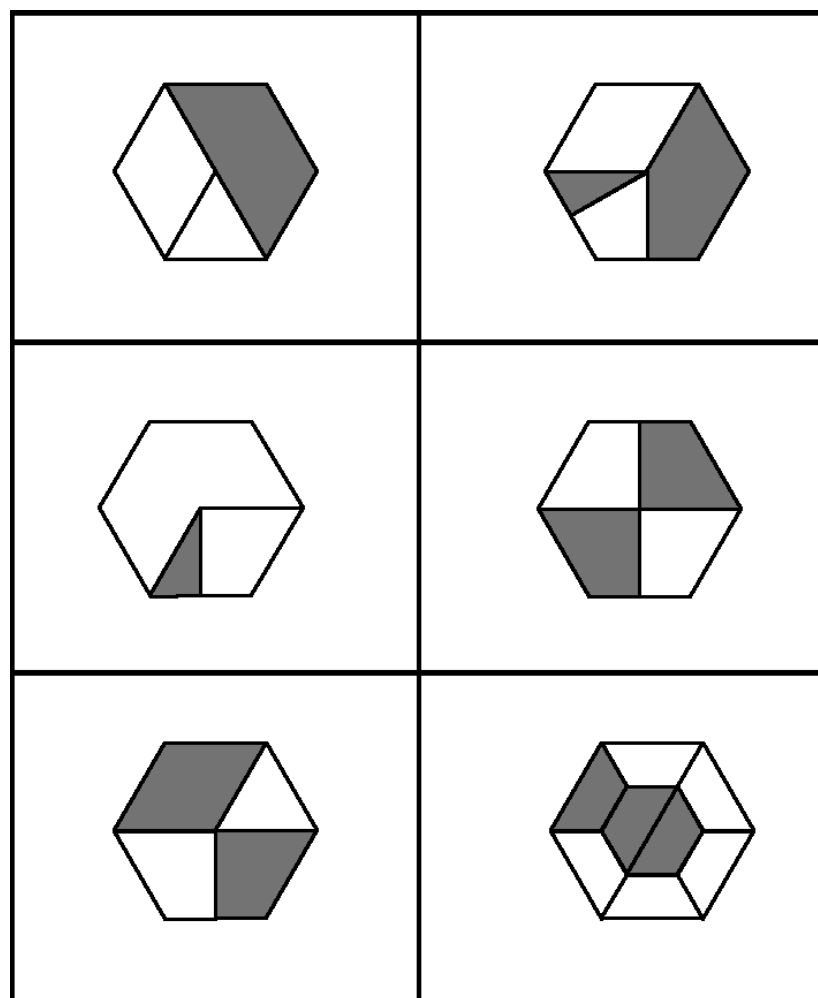
$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

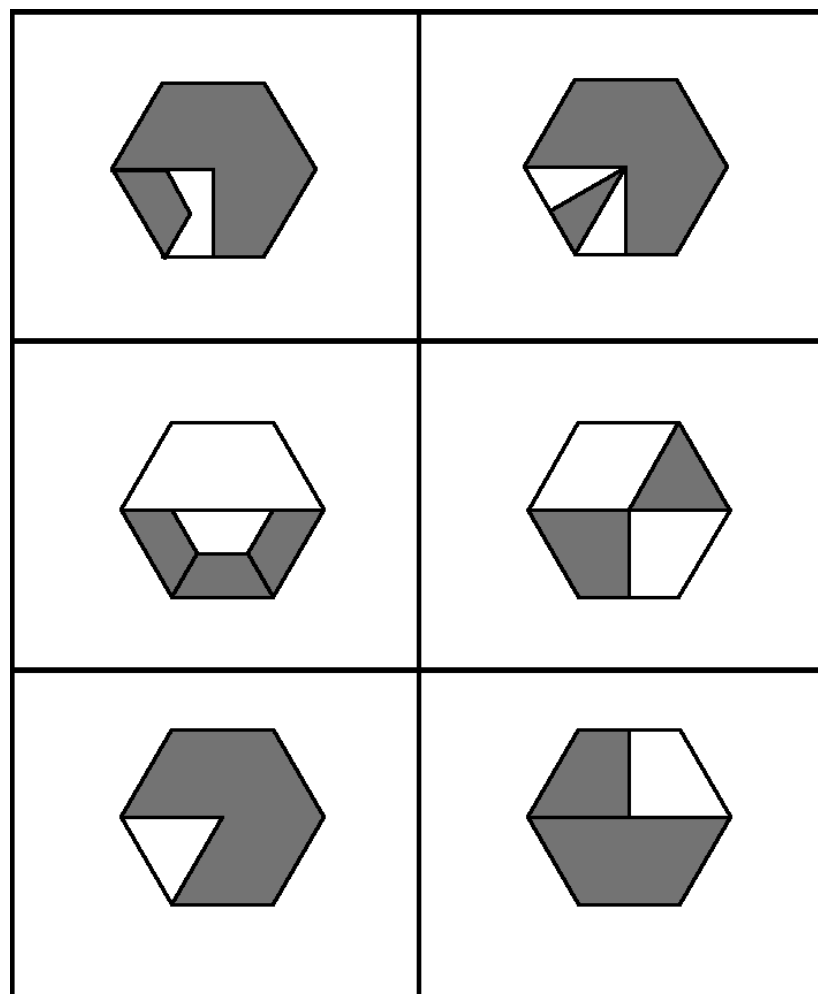
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

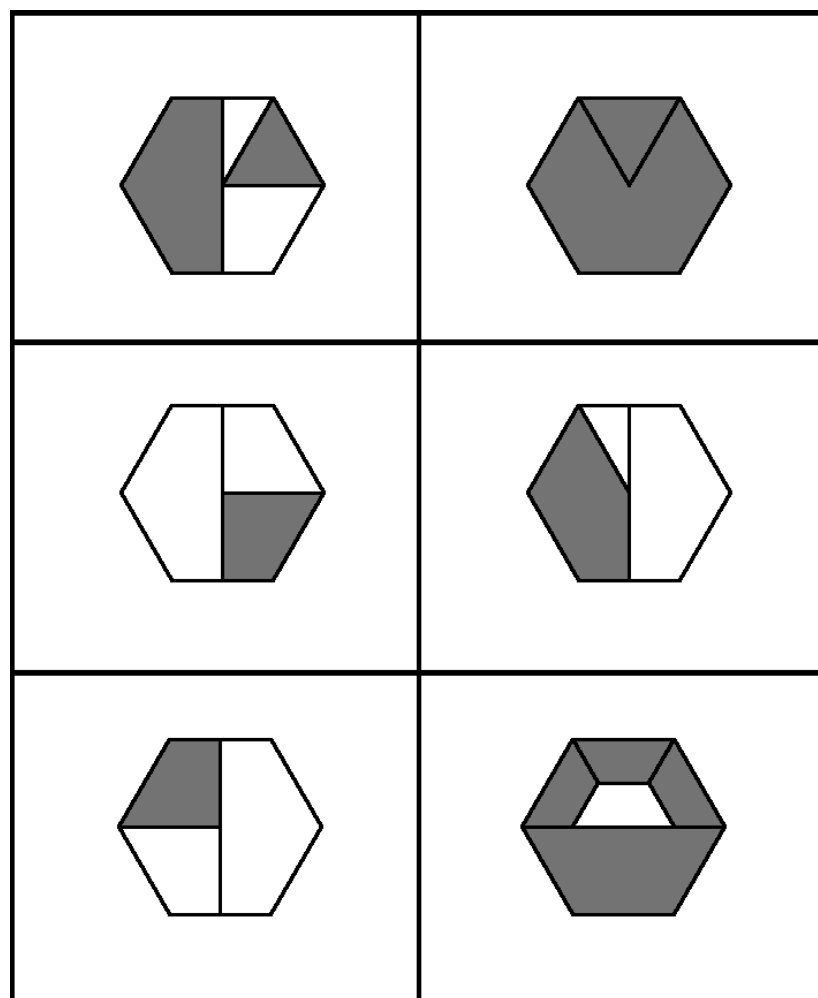
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$







EXERCÍCIO:

- Complete as fichas do jogo com operações adequadas.
- Monte mais uma cartela (a quarta que está faltando).

ORIENTAÇÕES:

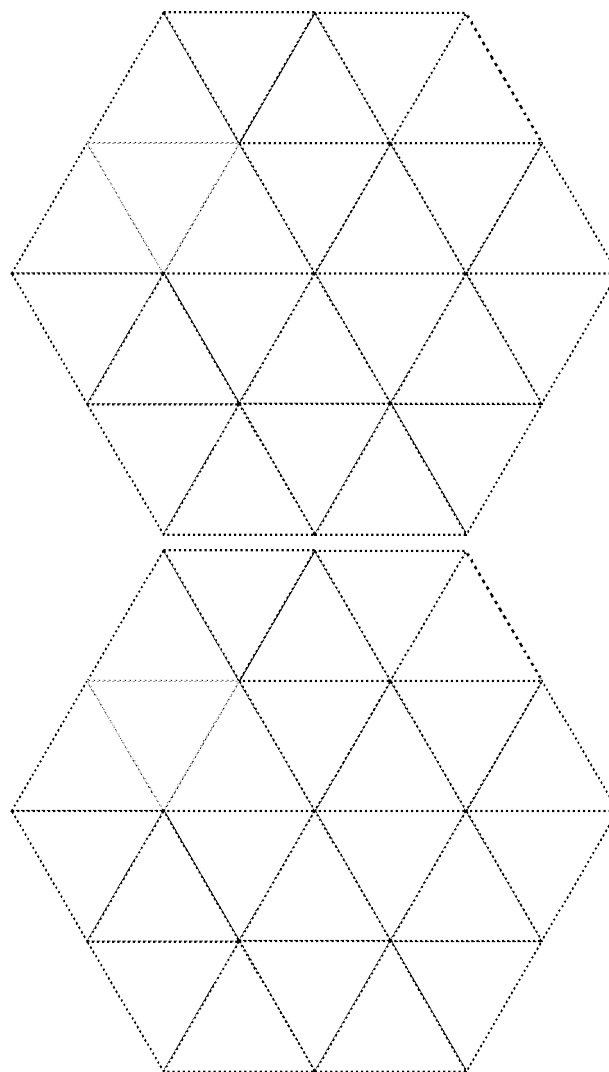
Frações envolvidas:

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{12}$

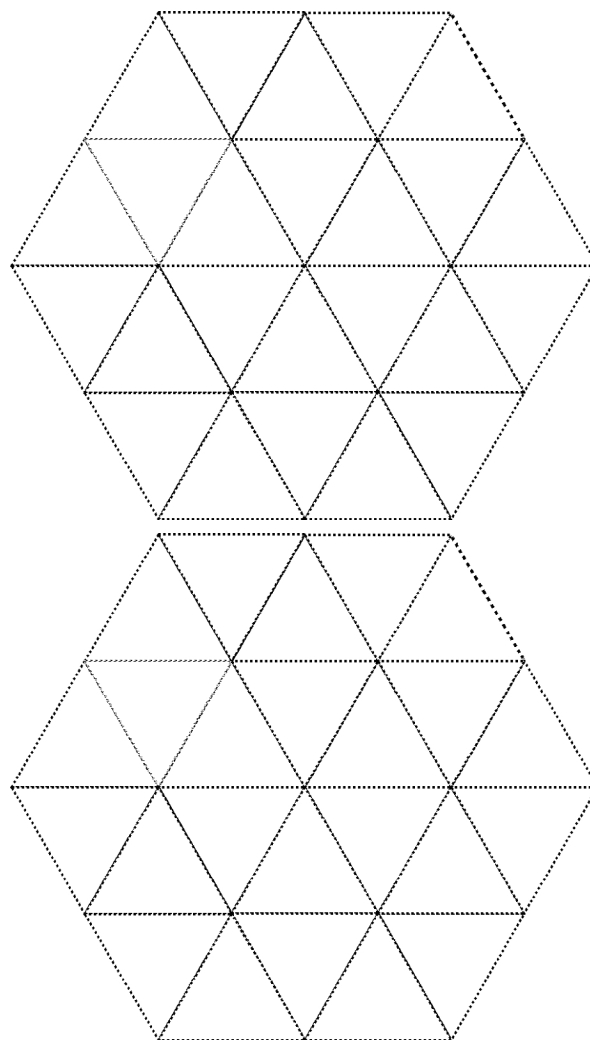
Cartões construídos:

$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$	$1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$	
$\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{12}$	$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}$	
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}$	$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	
$\frac{3}{8} = 1 - \frac{5}{8}$	$\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	$\frac{5}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}$	
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$	$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$	

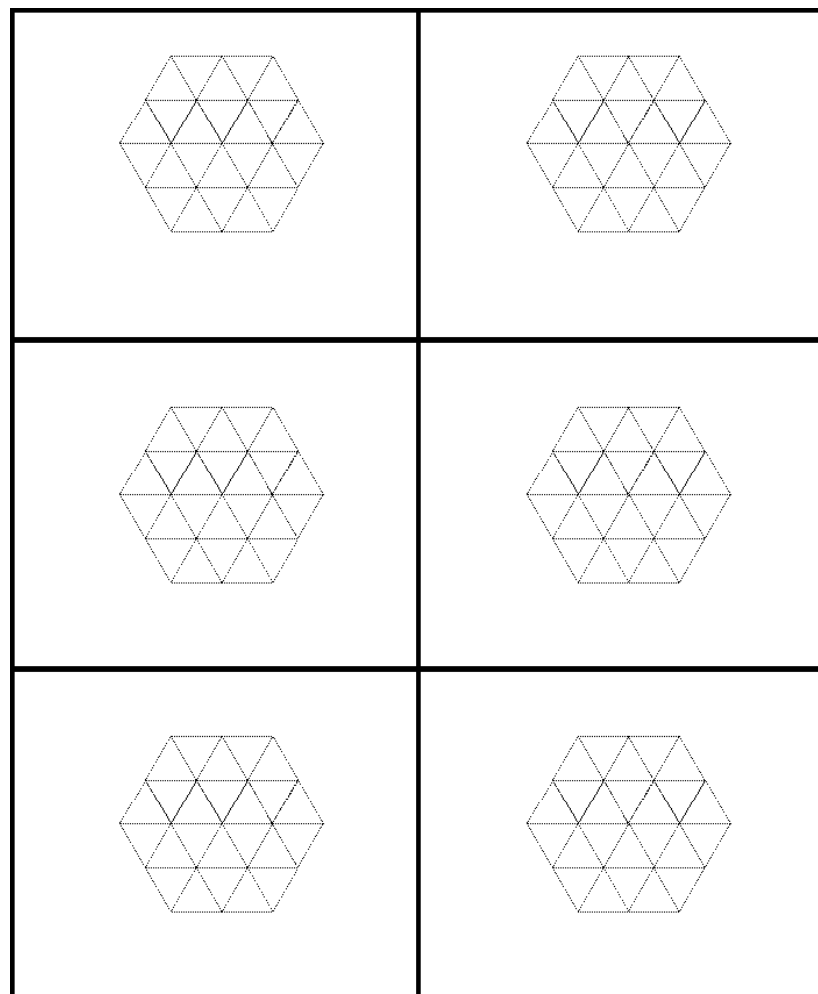
- Tente escrever cada uma delas como soma ou subtração de duas outras (ou múltiplos delas).
- Tente escrever algum múltiplo delas como a soma ou subtração de duas outras (ou múltiplos delas).



SUMÁRIO



SUMÁRIO



Use as malhas da página anterior para representar as somas ou subtrações que imaginar. Após escolher as mais adequadas, monte a cartela acima pintando de preto as regiões correspondentes às somas ou subtrações que você construiu.

J19 - BINGOS FRACIONÁRIOS - DIVISÃO DE FRAÇÕES

MATERIAL:

- 18 fichas com divisões das frações indicadas.
- 4 cartelas, cada uma com 9 resultados de divisões.

OBJETIVOS:

- Agilizar o cálculo mental da divisão de frações.

METODOLOGIA:

- A mesma dos jogos de bingo normais.

NÍVEL DE UTILIZAÇÃO:

- Mecanização da divisão de frações (12-13 anos).

Observe que os valores foram construídos a partir dos possíveis pares de multiplicação entre os números: (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17).

42/45 (7x6)/(9x5) 16/36 (4x4)/(6x6) 12/105 (4x3)/(7x15) 117/117 =(9x13)/(9x13) 54/28 (6x9)x(7x4) 63/18 (7x9)/(6x3) 45/14 (5x9)/(2x7) 56/13 (8x7)/(13x1) 40/18 (8x5)/(6x3)	14/45 (7x2)/(9x5) 22/56 (11x2)/(7x8) 27/77 (9x3)/(11x7) 30/32 (5x6)/(4x6) 90/96 (5x18)/(12x8) 36/25 (12x3)/(5x5) 70/44 (14x5)/(11x4) 63/26 (6x9)/(13x2) 24/7 (6x4)/(7x1)	15/48 (3x5)/(8x6) 48/60 (8x6)/(12x5) 49/117 (7x7)/(9x13) 34/35 (2x17)/(5x7) 96/90 (12x8)/(9x10) 48/35 (8x6)/(7x5) 48/21 (8x6)/(3x7) 24/9 (4x6)/(3x3) 91/30 (13x7)/(5x6)	18/63 (9x4)/(7x9) 21/48 (7x3)/(4x12) 40/48 (10x4)/(12x4) 49/84 (7x7)/(7x12) 44/44 (4x11)/(4x11) 27/8 (3x9)/(2x4) 77/27 (7x11)/(3x9) 78/22 (13x6)/(11x2) 104/63 (8x13)/(7x9)
--	--	---	---

$\frac{9}{7} \div \frac{2}{5}$	$\frac{4}{15} \div \frac{7}{3}$	$\frac{6}{7} \div \frac{4}{9}$	$\frac{14}{9} \div \frac{5}{3}$
$\frac{5}{6} \div \frac{3}{8}$	$\frac{7}{13} \div \frac{1}{8}$	$\frac{2}{9} \div \frac{4}{8}$	$\frac{21}{9} \div \frac{2}{3}$
$\frac{6}{7} \div \frac{1}{4}$	$\frac{9}{13} \div \frac{9}{13}$	$\frac{2}{5} \div \frac{9}{7}$	$\frac{10}{11} \div \frac{4}{7}$
$\frac{6}{12} \div \frac{8}{15}$	$\frac{3}{5} \div \frac{5}{12}$	$\frac{9}{11} \div \frac{7}{3}$	$\frac{7}{13} \div \frac{2}{9}$

$\frac{2}{8} \div \frac{4}{15}$	$\frac{2}{8} \div \frac{7}{11}$	$\frac{9}{8} \div \frac{1}{3}$	$\frac{13}{9} \div \frac{7}{8}$
$\frac{7}{3} \div \frac{9}{11}$	$\frac{7}{14} \div \frac{6}{7}$	$\frac{3}{5} \div \frac{24}{7}$	$\frac{6}{11} \div \frac{2}{13}$
$\frac{5}{6} \div \frac{8}{3}$	$\frac{5}{12} \div \frac{4}{8}$	$\frac{6}{9} \div \frac{1}{4}$	$\frac{24}{7} \div \frac{3}{2}$
$\frac{2}{3} \div \frac{21}{9}$	$\frac{4}{11} \div \frac{4}{11}$	$\frac{4}{7} \div \frac{5}{12}$	$\frac{17}{5} \div \frac{7}{2}$
$\frac{7}{13} \div \frac{8}{7}$	$\frac{7}{15} \div \frac{2}{13}$	$\frac{6}{12} \div \frac{5}{8}$	$\frac{8}{15} \div \frac{6}{12}$

$\frac{27}{8}$	$\frac{21}{48}$	$\frac{44}{44}$
$\frac{77}{27}$	$\frac{78}{22}$	$\frac{40}{48}$
$\frac{104}{63}$	$\frac{49}{84}$	$\frac{18}{63}$

$\frac{49}{117}$	$\frac{15}{48}$	$\frac{96}{90}$
$\frac{48}{21}$	$\frac{48}{60}$	$\frac{24}{9}$
$\frac{48}{35}$	$\frac{91}{30}$	$\frac{34}{35}$



SUMÁRIO

$\frac{45}{14}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{56}{13}$
$\frac{12}{105}$	$\frac{40}{18}$	$\frac{117}{117}$
$\frac{54}{28}$	$\frac{42}{45}$	$\frac{63}{18}$

$\frac{24}{7}$	$\frac{27}{77}$	$\frac{30}{32}$
$\frac{90}{96}$	$\frac{63}{26}$	$\frac{70}{44}$
$\frac{14}{45}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{22}{56}$

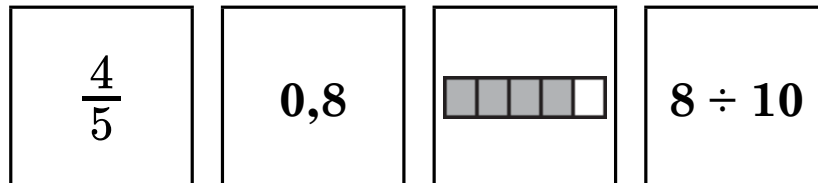


J20 - JOGOS COM CARTAS (A)

MATERIAL:

- 48 cartas com 12 valores diferentes, cada um expresso de quatro maneiras diferentes:
 - fração irredutível;
 - número decimal;
 - parte sombreada de uma tira, placa ou cubo;
 - divisão correspondente.

Por exemplo:



OBJETIVOS:

- Fixar o processo de simplificação de frações.
- Conhecer diferentes formas de representação dos racionais positivos.

METODOLOGIA:

Podem ser diferentes tipos de jogos, por exemplo, os seguintes:

J20 (A) - JOGO DAS FAMÍLIA

- Número aconselhável de jogadores: 4 a 6
- Objetivo do Jogo: Reunir tantas famílias possíveis com as quatro cartas de mesmo valor.
- Regras:

Distribui-se 4 cartas para cada jogador, e as que sobram ficam numa pilha.

O jogador que começa (A) pede a outro qualquer (B) uma carta da mesma família que ele possua. Por exemplo, se o jogador possui 0,1 pode solicitar a outro jogador a fração correspondente ($1/10$), podendo ser tanto a figura pintada quanto a divisão $1:10$.

Se o jogador (B) tiver a carta, ele deverá doá-la ao jogador A. Então, o jogador poderá continuar, solicitando uma carta a outro jogador (C). Se o jogador (C) a possui, deverá entregá-la ao jogador (A). Caso o jogador (C) não a tenha, o jogador (A) deverá tirar uma carta da pilha e passar a vez ao jogador seguinte.

Caso algum jogador complete uma família de cartas, deverá colocá-la sobre a mesa e continuar jogando.

O jogo continua até que acabem de formar todas as famílias. Ganha quem tiver formado mais famílias.

0,03

0,02

0,9

0,04

0,3

0,5

0,3

0,08

0,1

SUMÁRIO

0,001

0,003

0,01

$$\frac{3}{100}$$

$$\frac{2}{100}$$

$$\frac{9}{10}$$

$$\frac{4}{100}$$

$$\frac{2}{10}$$

$$\frac{5}{10}$$

SUMÁRIO


$$\frac{3}{10}$$

$$\frac{8}{100}$$

$$\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1000}$$

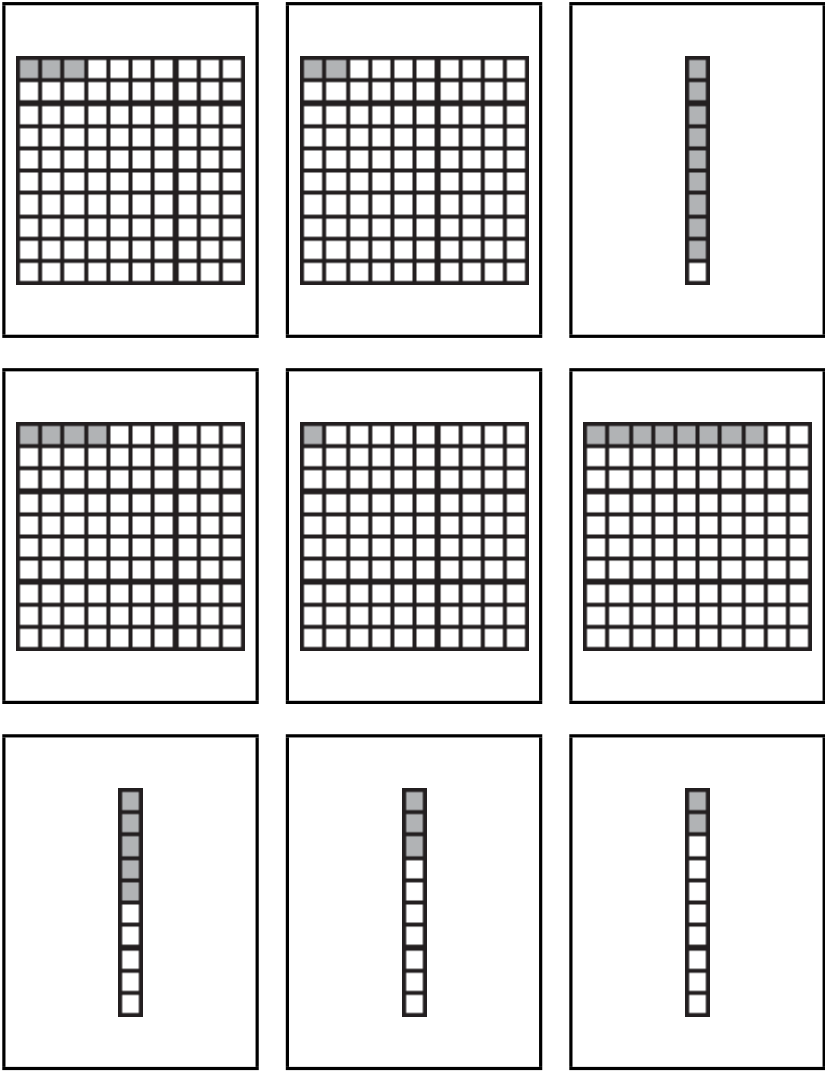
$$\frac{3}{1000}$$

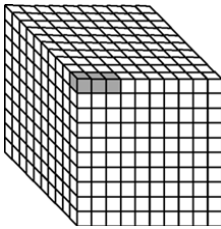
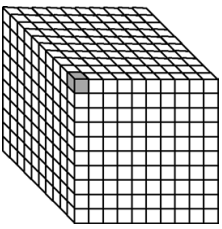
$$\frac{1}{100}$$

$$\frac{3}{100}$$

$$\frac{2}{100}$$

$$\frac{9}{10}$$



		
$3 \div 100$	$2 \div 100$	$9 \div 10$
$4 \div 100$	$2 \div 10$	$5 \div 10$

$$3 \div 10$$

$$8 \div 100$$

$$1 \div 10$$

$$1 \div 1000$$

$$3 \div 1000$$

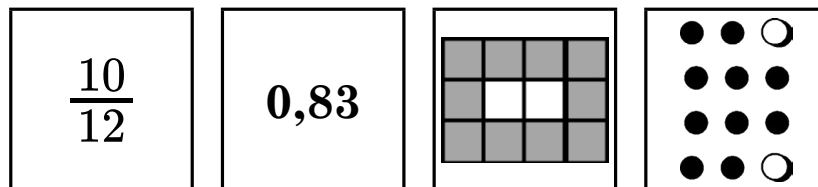
$$1 \div 100$$

J20 - JOGOS COM CARTAS (B)

MATERIAL:

- 48 cartas com 12 valores diferentes, cada um expresso de quatro maneiras diferentes:
 - fração não irredutível;
 - número decimal;
 - parte sombreada de um quadrado;
 - parte sombreada de uma coleção.

Por exemplo:



OBJETIVOS:

- Mecanização da simplificação das frações.
- Conhecer diferentes formas de representação dos racionais positivos.

METODOLOGIA:

Podem ser diferentes tipos de jogos, por exemplo, os seguintes:

J20(B) - JOGO DAS FAMÍLIAS

- Número aconselhável de jogadores: 4 a 6
- Objetivo do Jogo: Reunir tantas famílias possíveis com as quatro cartas de mesmo valor.
- Regras:

4 cartas são distribuídas para cada jogador, e as que sobram ficam numa pilha.

O jogador que começa (A) pede a outro qualquer (B) uma carta da mesma família que ele possua. Por exemplo, se o jogador possui 0,1 pode solicitar a outro jogador a fração correspondente ($\frac{1}{10}$), podendo ser tanto a figura pintada quanto a divisão 1:10.

Se o jogador (B) tiver a carta, ele deverá doá-la ao jogador A. Então, o jogador poderá continuar, solicitando uma carta a outro jogador (C). Se o jogador (C) a possui, deverá entregá-la. ao jogador (A). Caso o jogador (C) não a possua, o jogador (A) deverá tirar uma carta da pilha e passar a vez ao jogador seguinte.

Caso algum jogador complete uma família de cartas, deverá colocá-la sobre a mesa e continuar jogando.

O jogo continua até que acabem de formar todas as famílias. Ganha quem tiver formado mais famílias .

B1

$$\frac{4}{24}$$

$$\frac{6}{9}$$

$$\frac{4}{12}$$

$$\frac{6}{16}$$

$$\frac{5}{20}$$

$$\frac{2}{18}$$

$$\frac{3}{24}$$

$$\frac{10}{12}$$

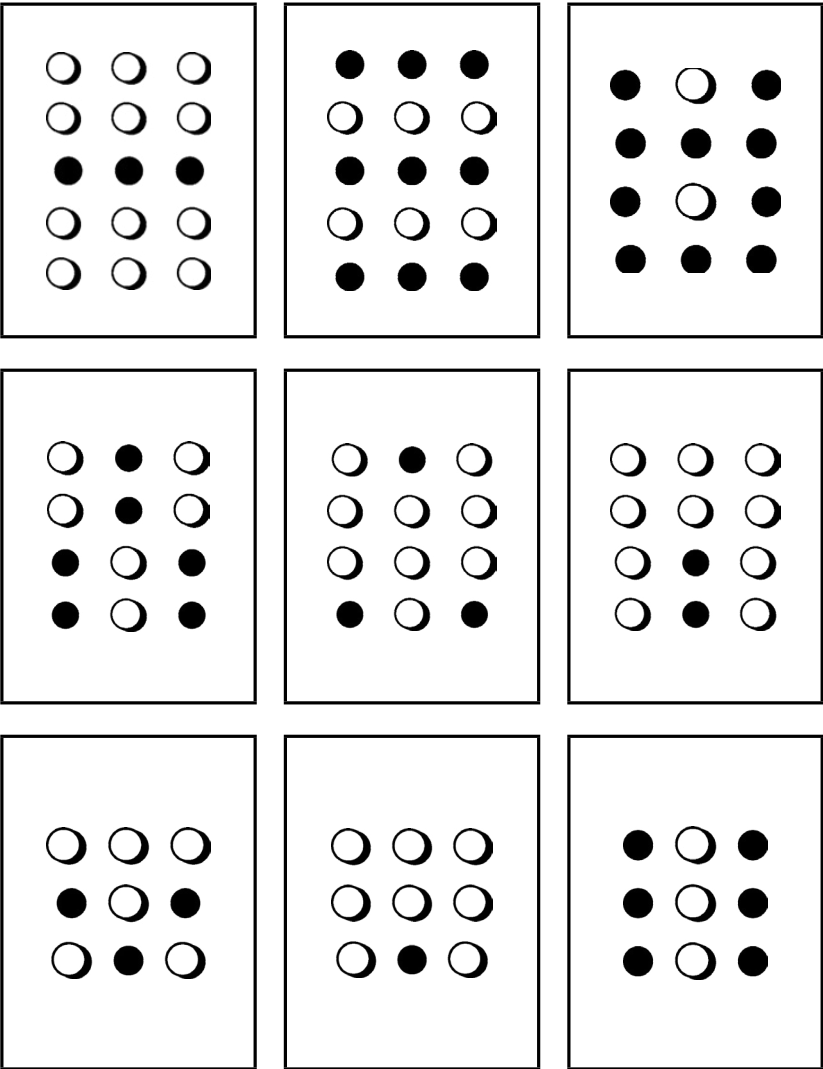
$$\frac{6}{12}$$

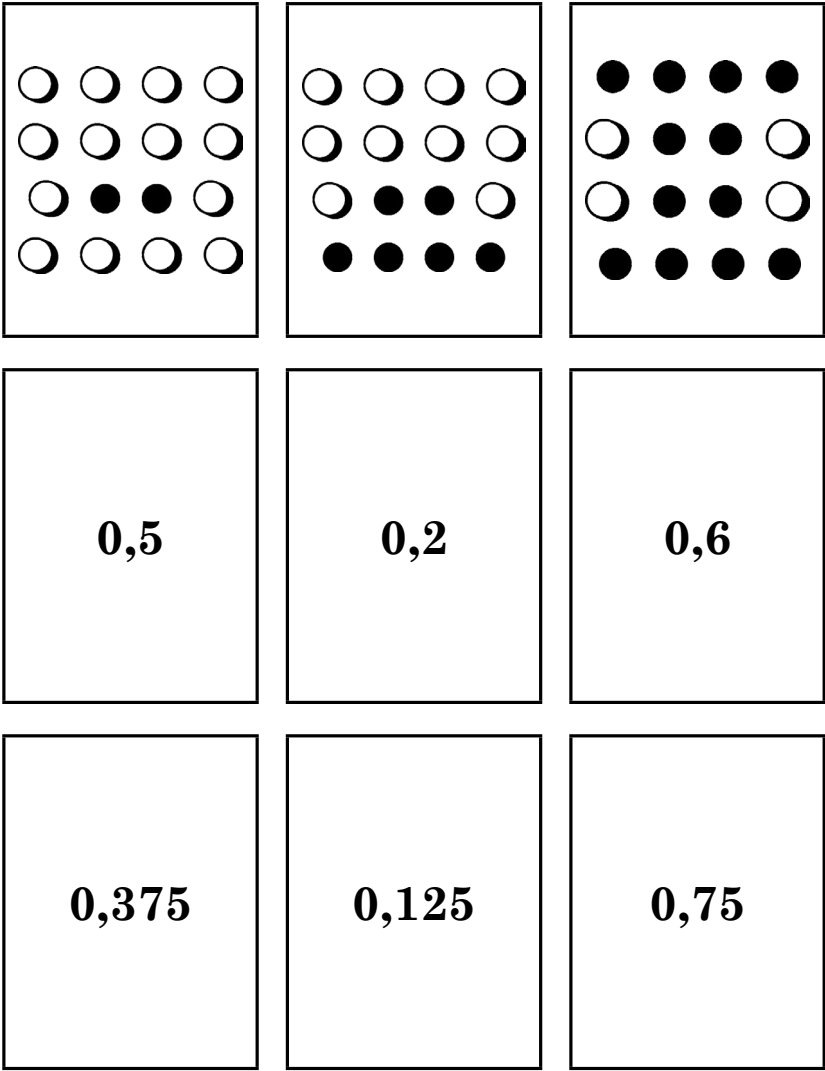
$$\frac{18}{24}$$

$$\frac{6}{10}$$

$$\frac{20}{100}$$

B2





0,25

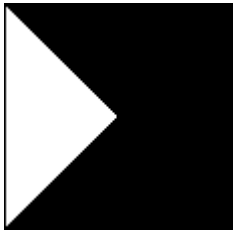
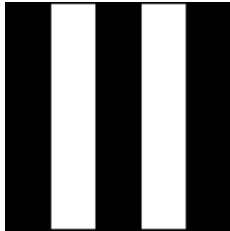
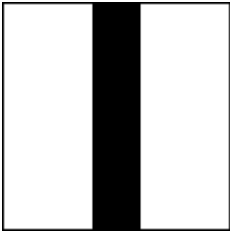
0,8 $\bar{3}$

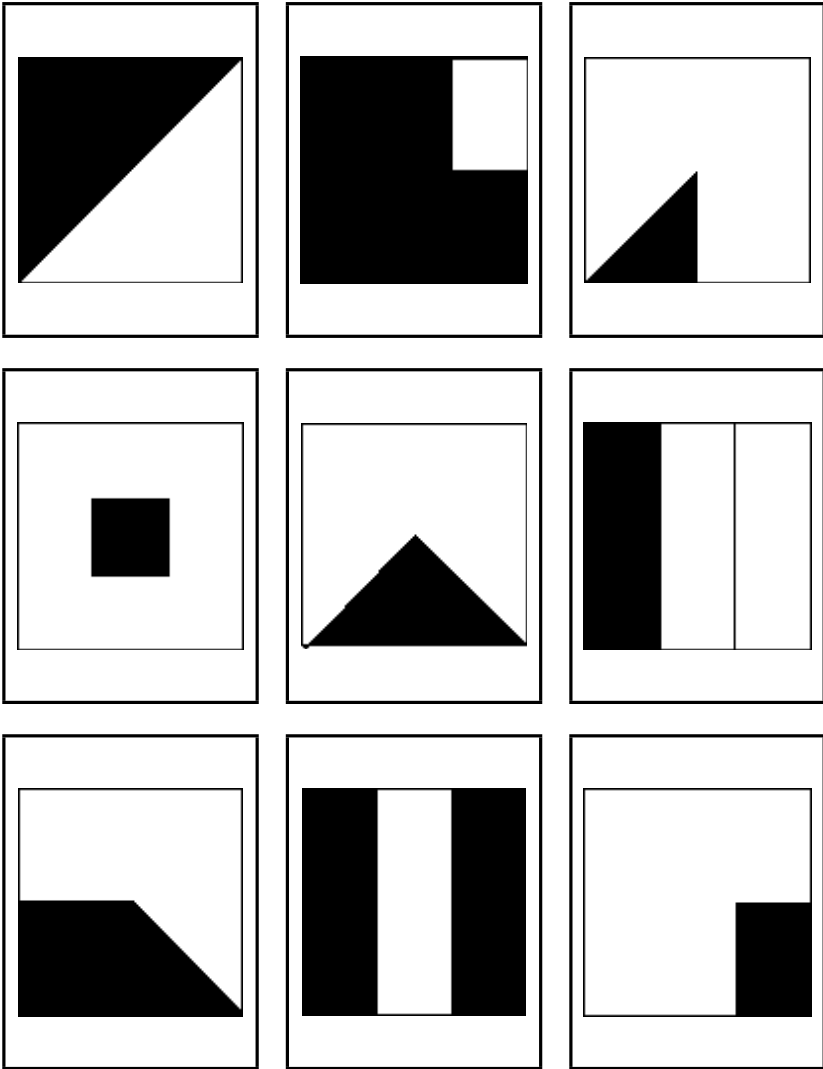
0, $\bar{6}$

0,1

0, $\bar{3}$

0,1 $\bar{6}$





J21 - ESCRREVENDO FRASES FRACIONÁRIAS (A)

MATERIAL:

- 42 fichas do tipo: "é p/q de" (a)
- 40 fichas com partes de unidades [b1] e 20 fichas com partes de coleções. [b2]

OBJETIVO:

- Escrever uma frase matemática envolvendo frações.

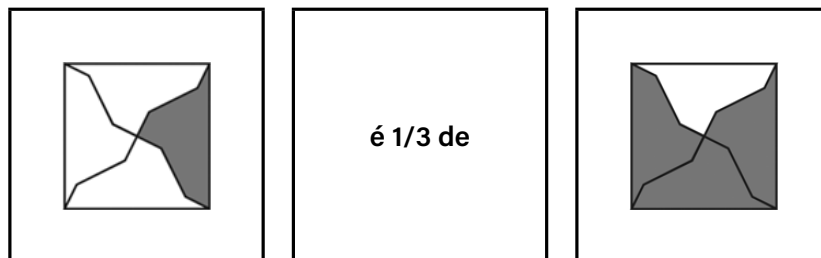
METODOLOGIA

- Separe as cartas em duas pilhas:
 - uma com as 42 fichas tipo (a);
 - uma com as 60 cartas tipo (b).
- Escolha uma carta do tipo (b). Coloque-a no primeiro espaço.
- Pegue uma carta do tipo (a) e outra do tipo (b).
- Você deve estabelecer uma frase matemática correta segundo o que tenha saído. Caso consiga, ganha dois pontos.

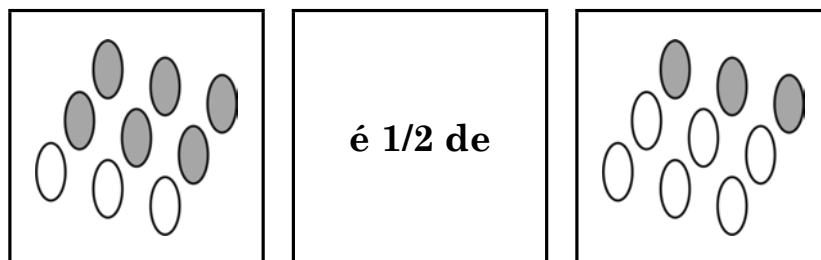
Caso a segunda peça não corresponda à peça desenhada a adequada, ganha um ponto. Caso não saiba, não ganha nenhum ponto.

Caso você erre, perde um ponto.

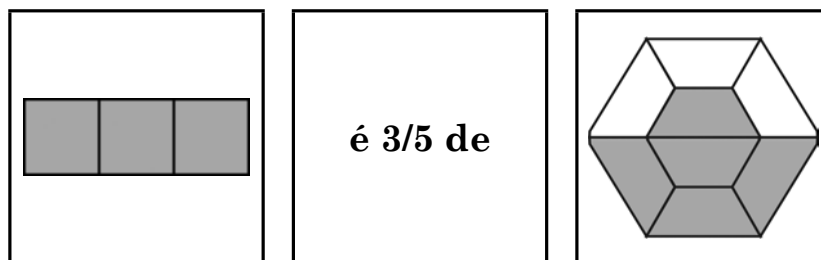
Exemplo de frase correta:



Exemplo de frase errônea por tratar-se da fração inversa:



Exemplo de situação incorreta por ter unidade distinta:



é $\frac{1}{4}$ de

é $\frac{1}{8}$ de

é $\frac{3}{16}$ de

é $\frac{2}{1}$ de

é $\frac{1}{8}$ de

é $\frac{3}{16}$ de

é $\frac{2}{1}$ de

é $\frac{1}{4}$ de

é $\frac{1}{2}$ de

é $\frac{2}{3}$ de

é $\frac{3}{2}$ de

é $\frac{2}{5}$ de

é $\frac{3}{4}$ de

é $\frac{1}{3}$ de

é $\frac{1}{8}$ de

é $\frac{4}{3}$ de

é $\frac{8}{1}$ de

é $\frac{3}{2}$ de

SUMÁRIO

é $\frac{1}{16}$ de

é $\frac{1}{8}$ de

é $\frac{1}{2}$ de

é $\frac{1}{2}$ de

é $\frac{4}{3}$ de

é $\frac{1}{2}$ de

é $\frac{4}{1}$ de

é $\frac{8}{1}$ de

é $\frac{9}{4}$ de

SUMÁRIO

é $\frac{5}{2}$ de

é $\frac{2}{5}$ de

é $\frac{4}{3}$ de

é $\frac{6}{1}$ de

é $\frac{3}{2}$ de

é $\frac{1}{6}$ de

é $\frac{4}{3}$ de

é $\frac{2}{5}$ de

é $\frac{1}{8}$ de

é $\frac{4}{5}$ de

é $\frac{5}{4}$ de

é $\frac{5}{2}$ de

é $\frac{6}{1}$ de

é $\frac{3}{2}$ de

é $\frac{1}{6}$ de

é $\frac{1}{7}$ de

é $\frac{4}{9}$ de

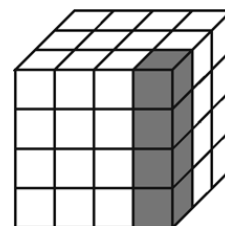
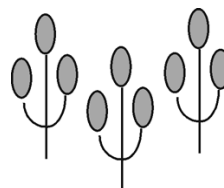
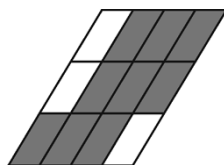
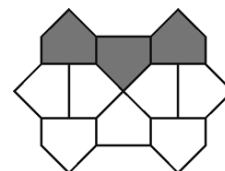
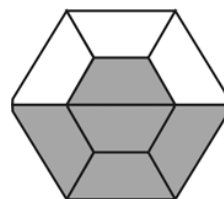
é $\frac{9}{4}$ de

SUMÁRIO

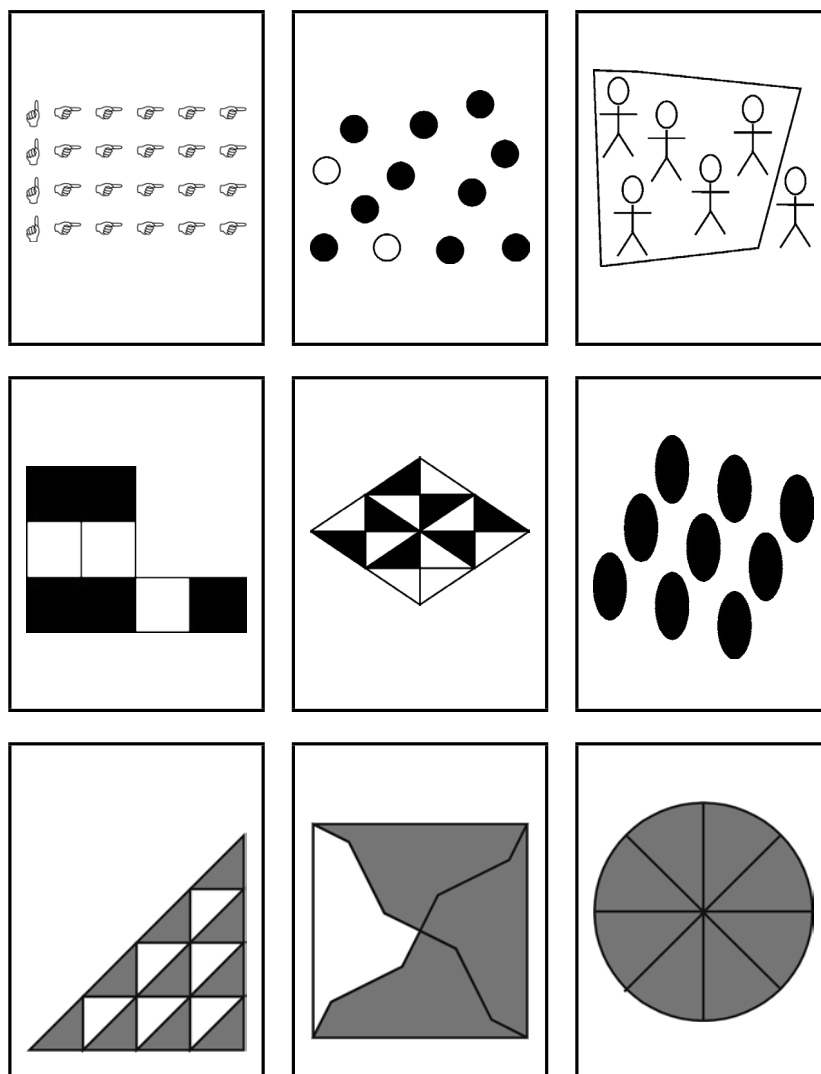
é $\frac{5}{3}$ de

é $\frac{3}{1}$ de

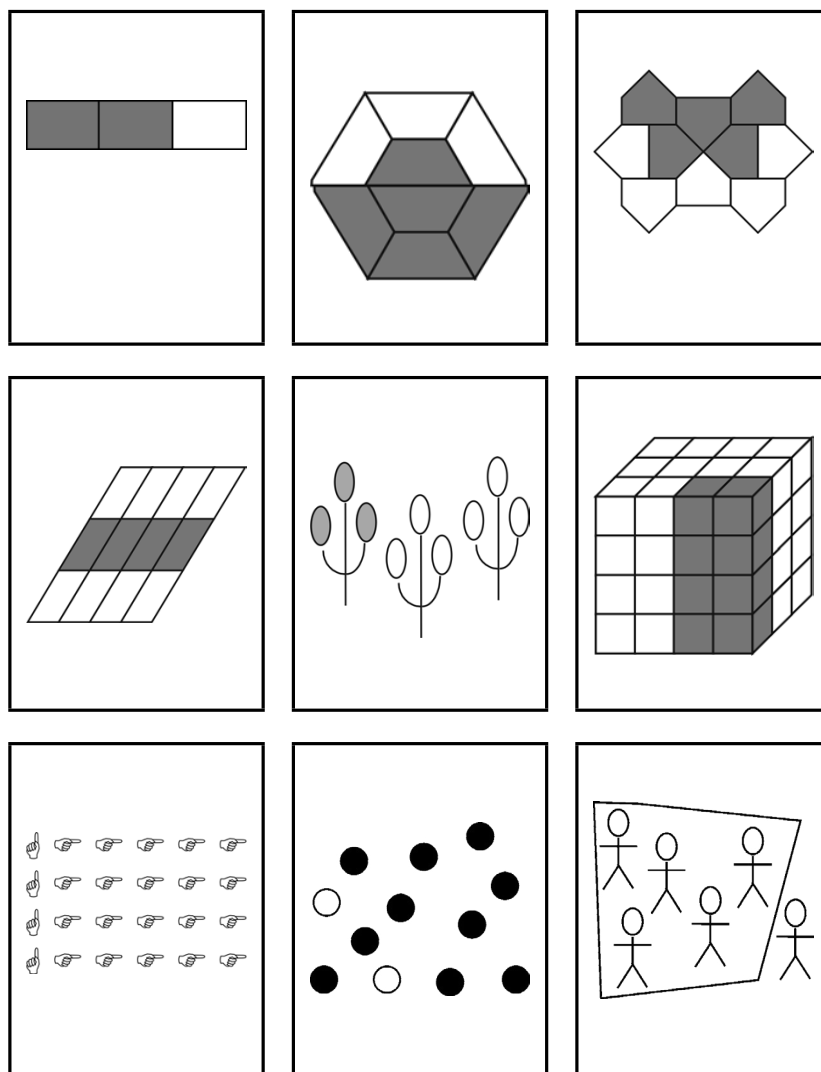
é $\frac{1}{3}$ de

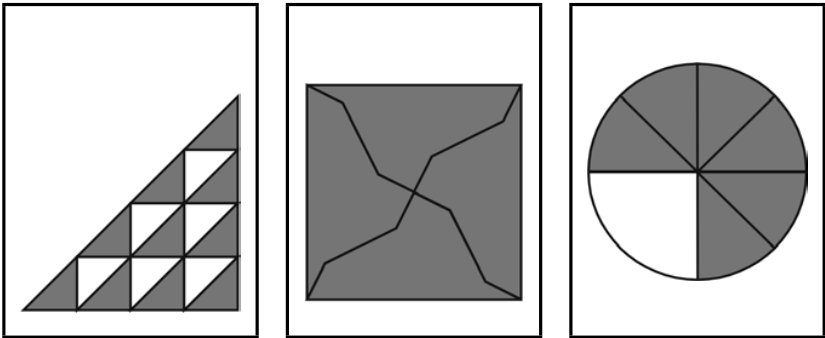
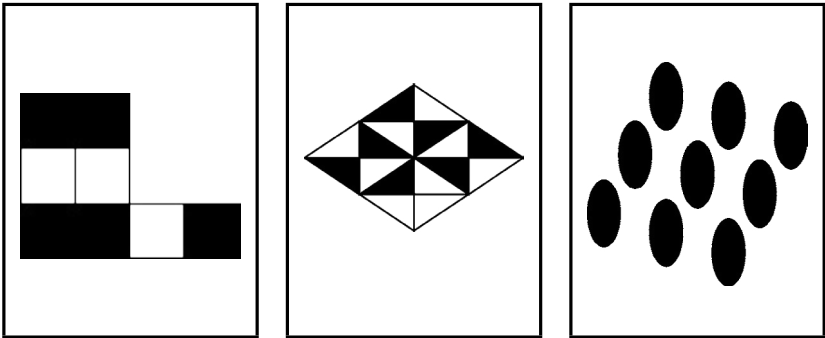


SUMÁRIO

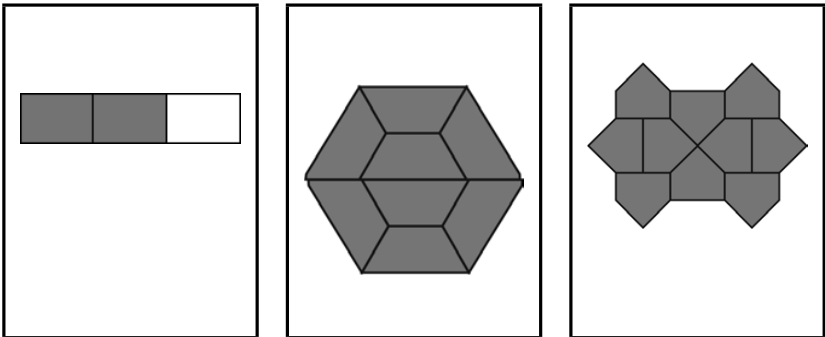


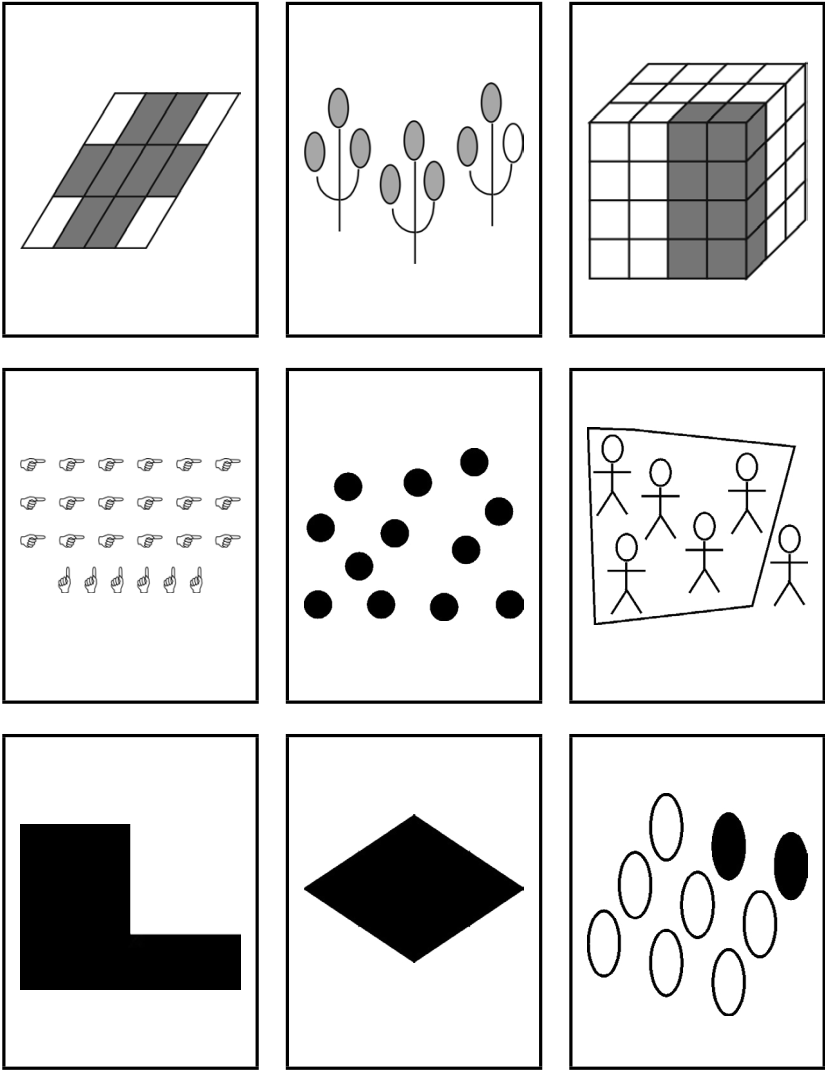
SUMÁRIO



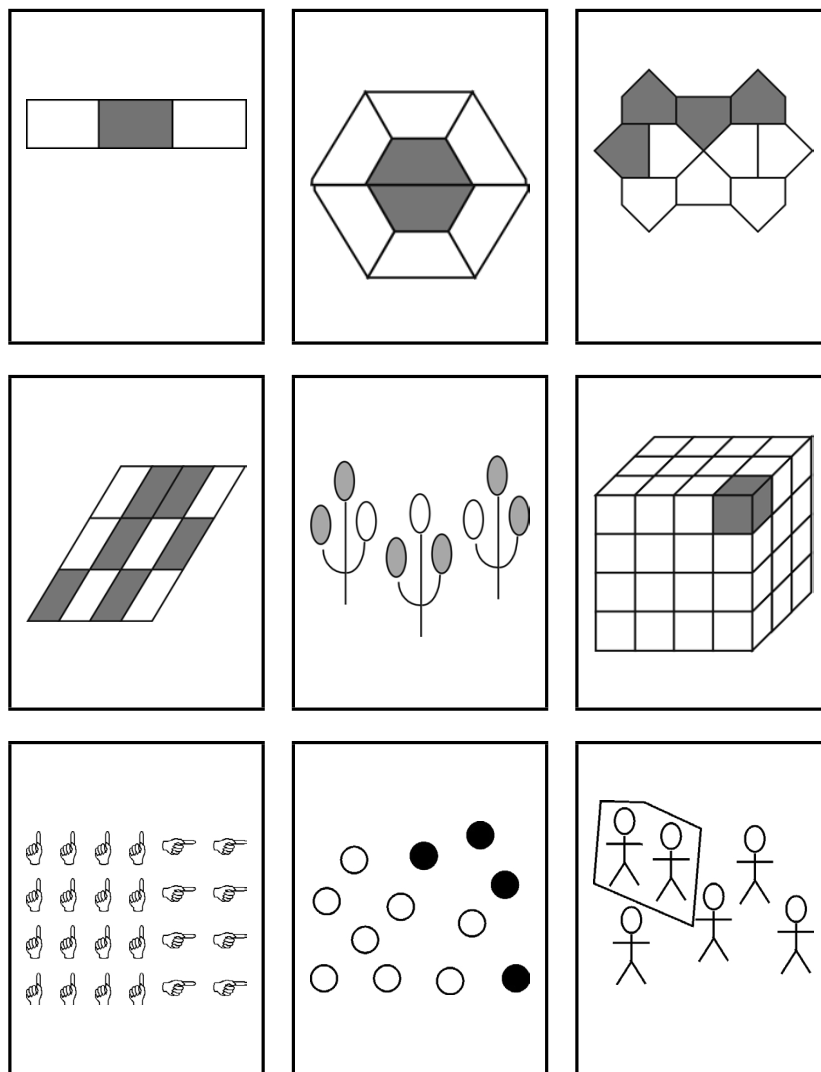


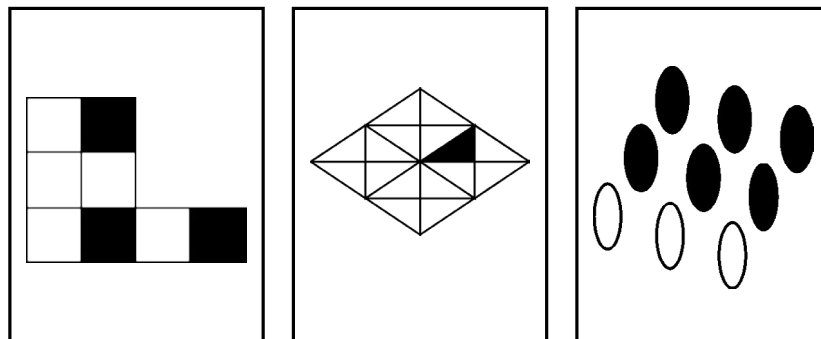
página (B)





página (C)





página (D)

J22 - ESCRREVENDO FRASES FRACIONÁRIAS (B)

MATERIAL:

- 24 cartas contendo números inteiros e frações mistas.
- 24 cartas contendo operações de multiplicação por inteiros e por frações.

OBJETIVO:

- Expressar corretamente a relação entre dois números através de uma operação.

METODOLOGIA:

- Este material pode ser jogado como o anterior, formando frases de 3 elementos. Por exemplo: $32 \rightarrow (x \frac{3}{4}) \rightarrow 24$.
- Outra opção é jogá-lo como um dominó.

ATIVIDADE:

Os estudantes deverão completar a seguinte tabela durante o jogo:

$$8 \times 4 = 32$$

Obs.: $x \frac{3}{8} = x \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

	32	24	12	8	6	4 1/2	3	1 1/2
32	1	$x \frac{3}{4}$	$x \frac{3}{8}$	$x \frac{1}{4}$	$x \frac{3}{16}$	$x \frac{9}{64}$	$x \frac{3}{32}$	$x \frac{3}{64}$
24	$x \frac{4}{3}$	1	$x \frac{1}{2}$	$x \frac{1}{3}$	$x \frac{1}{4}$	$x \frac{3}{16}$	$x \frac{1}{8}$	$x \frac{1}{16}$
12	$x \frac{8}{3}$	$x 2$	1	$x \frac{2}{3}$	$x \frac{1}{2}$	$x \frac{3}{8}$	$x \frac{1}{4}$	$x \frac{1}{8}$
8	$x 4$	$x 3$	$x \frac{3}{2}$	1	$x \frac{3}{4}$	$x \frac{9}{16}$	$x \frac{3}{8}$	$x \frac{3}{16}$
6	$x \frac{16}{3}$	$x 4$	$x 2$	$x \frac{4}{3}$	1	$x \frac{3}{4}$	$x \frac{1}{2}$	$x \frac{1}{4}$
4 1/2	$x \frac{64}{9}$	$x \frac{16}{3}$	$x \frac{8}{3}$	$x \frac{16}{9}$	$x \frac{4}{3}$	1	$x \frac{2}{3}$	$x \frac{1}{3}$
3	$x \frac{32}{3}$	$x 8$	$x 4$	$x \frac{8}{3}$	$x 2$	$x \frac{3}{2}$	1	$x \frac{1}{2}$
1 1/2	$x \frac{64}{3}$	$x 16$	$x 8$	$x \frac{16}{3}$	$x 4$	$x 3$	$x 2$	1

32	32	32	4 1/2
1 1/2	1 1/2	1 1/2	4 1/2
24	24	12	4 1/2
3	3	3	8
8	8	12	12

$\times 4$	$\times 4$	$\times 4$	$\times \frac{3}{2}$
$\times \frac{3}{2}$	$\times \frac{3}{2}$	$\times \frac{2}{3}$	$\times \frac{3}{2}$
$\times \frac{1}{2}$	$\times \frac{1}{4}$	$\times \frac{3}{4}$	$\times 2$
$\times \frac{1}{2}$	$\times \frac{1}{4}$	$\times \frac{3}{4}$	$\times 2$
$\times \frac{1}{2}$	$\times \frac{1}{4}$	$\times \frac{3}{4}$	$\times 2$
$\times \frac{4}{3}$	$\times \frac{4}{3}$	$\times \frac{4}{3}$	$\times \frac{2}{3}$

J23 - JOGOS DE PERCURSO FRACIONÁRIO

MATERIAL:

- Tabuleiro com pista de casas que representam um circuito. Nesse tabuleiro, as casas estão numeradas e subdivididas em duas ou quatro partes iguais, e uma linha indica a progressão a seguir.
- Uma coleção de cartas com números naturais.
- Uma coleção de cartas com frações.
- Fichas ou pinos para indicar a posição dos jogadores.

JOGO (1)

Tabuleiro: cada casa está dividida em duas partes de modo que somente se pode alcançar inteiros ou a metade.

12 Cartas com números naturais: 24(1); 18 (3), 12 (4) e 6 (4).

72 Cartas com frações: temos $1/1$, $3/4$, $2/3$, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ ou seus equivalentes. Também há cartas com frações negativas.

METODOLOGIA:

Cada jogador avança conforme o produto de duas cartas (naturais x fração). Temos duas possibilidades: tirar um número inteiro ou aquele mais metade. Se tirar um número inteiro, coloca-se a ficha ou pino sobre a região numerada (de 1 a 72) e, se tirar metade, coloca-se sobre a metade da casa não numerada.

JOGO (1): NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

6	6	6	6
12	12	12	12
18	18	18	24

Modelo de tabuleiro

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
24														39
24		62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72		40
24		61												41
24		60												42
24		59												43
24		58												44
24		57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
24														
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24

JOGO (1) E (2): NÚMEROS FRACIONÁRIOS

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$
$-\frac{1}{1}$	$-\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

JOGO (2): NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

3	3	3	3
6	6	6	6
12	12	12	12
15	15	15	18
18	21	21	24

JOGO (2)

Tabuleiro: cada casa está dividida em quatro partes: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1.

- **20 Cartas com números naturais:** 24(1), 21(2), 18(2), 15(3), 12(4), 6(4) e 3(4).
- **72 Cartas com frações:** temos $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ ou seus equivalentes. Também há cartas com frações negativas.

METODOLOGIA:

Número de jogadores: 4.

- O jogo consiste em tirar uma carta de cada pilha (natural e fração) e avançar no tabuleiro segundo o produto obtido (por exemplo, $\frac{2}{8}$ de 15 = $3 \frac{3}{4}$, ou seja, o jogador deverá avançar três casas inteiras e situar-se no local que indica $\frac{3}{4}$ da casa seguinte). Na próxima rodada, deverá somar a partir do local onde está situado.
- Ganha o jogo o primeiro que chegar ao final.

Obs.: Numa segunda versão, os jogos podem envolver produtos de números negativos.

JOGO (1): VERSÃO COM NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

-6	-6	6	6
-12	12	12	12
-18	18	18	24

JOGO (2): VERSÃO COM NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

-3	-3	3	3
-6	6	6	6

-12	12	12	12
-15	15	15	18
18	-21	21	24

J24 - BINGO DE APROXIMAÇÃO DA RETA

MATERIAL:

- Cartas com as frações indicadas.
- 4 cartões, cada um com seis representações gráficas dessas frações sobre a reta numérica. Neste jogo, as frações estão representadas numa reta "quebrada", mas bem graduada, de modo que cada fração corresponda aproximadamente a um ponto dessa reta.

OBJETIVOS:

- Adquirir um domínio melhor da aproximação das frações, podendo elas serem ou não, menores que a unidade.
- Identificar a representação de frações na reta numérica.
- Calcular mentalmente as equivalências necessárias para situar as frações. Esse cálculo deverá seguir o padrão egípcio de transformar as frações em soma de potências de $(1/2)$, ou seja, $1+1/2+1/4+1/8+....$

METODOLOGIA:

- Como o bingo normal. Nível:
- A partir do 7º ano.

Obs.: Temos 48 cartas (vide quadro a seguir).

E dois conjuntos de 4 cartões diferentes indo de 0 a $2\frac{1}{2}$ com uma graduação de $1/4$.

ATIVIDADE:

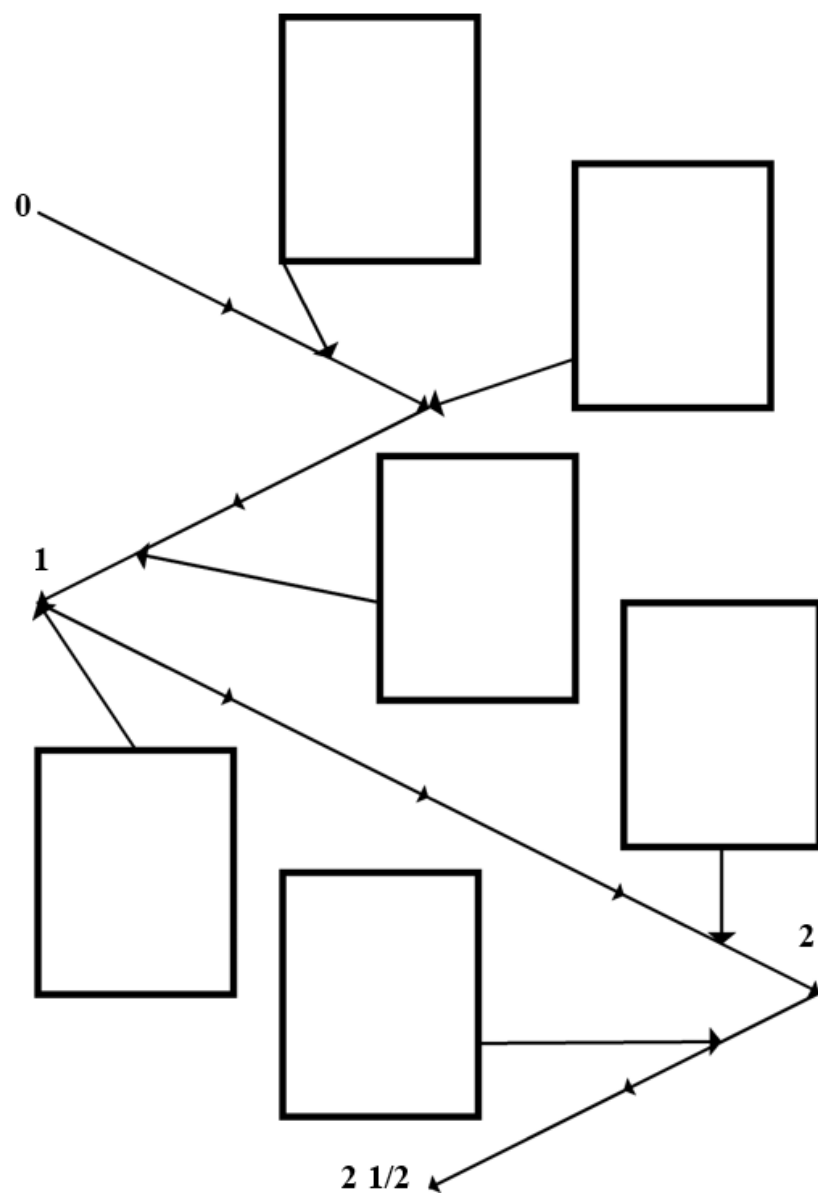
Tente decompor todos os números indicados no quadro a seguir em somas ou subtrações de potências negativas de 2, ou seja, $2n$ ($n < 0$ ou $n = 0$). No quadro, já apresentamos algumas das respostas (casos de soma).



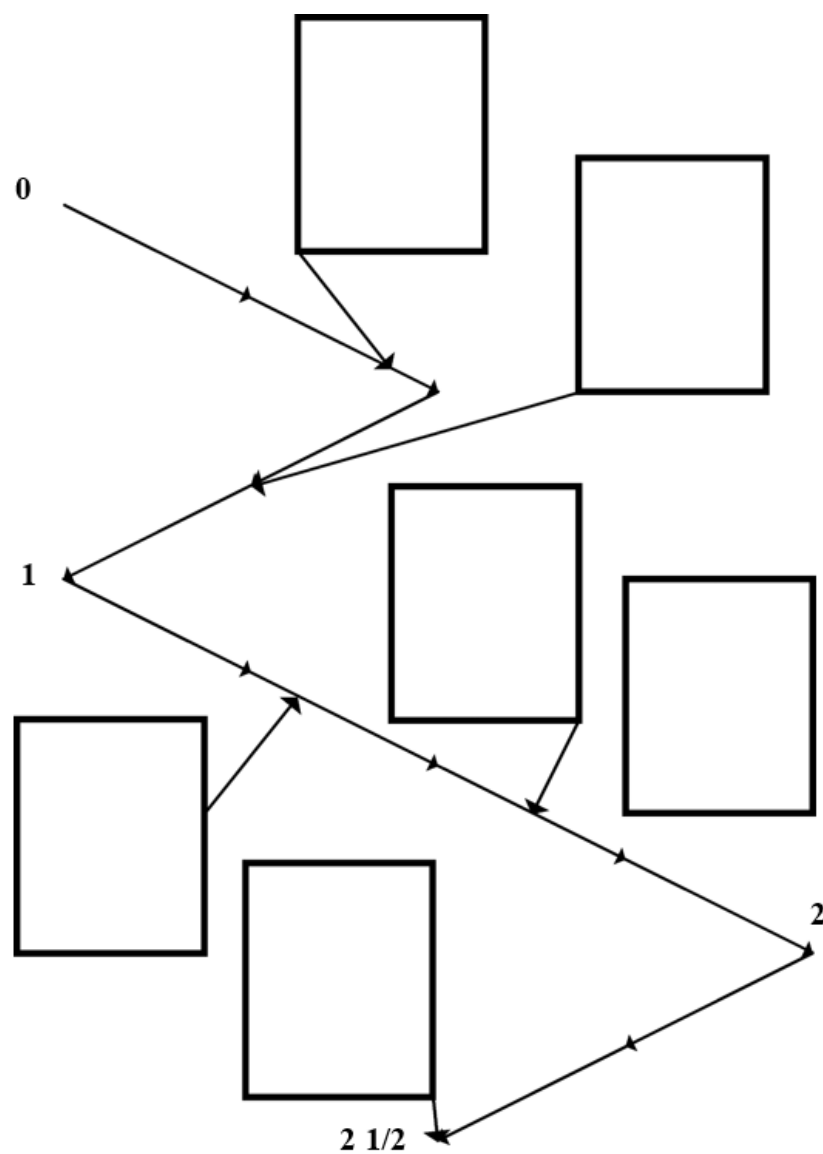
CARTAS

4+1/6	25/6		
2+1/2+1/12	31/12		
2+1/2	5/2		
2+1/4+1/8	19/8		
2+1/4	9/4	9/4	
2+1/8	17/8		
2+1/9	19/9		
2	4/2	8/4	4/2
1+4/5	9/5		
1+3/4+3/16	31/16		
1+3/4	7/4		
1+1/2+1/3	11/6		
1+1/2+1/5	34/20		
1+1/2+3/8	15/8		
1+1/2+1/8	13/8	13/8	13/8
1+1/2	3/2	3/2	
1+1/4+1/8	11/8		
1+1/4+1/5	29/20		
1+1/4+1/16	21/16		
1+1/4	5/4	5/4	
1+1/8	9/8		
1+1/20	21/20		
1	4/4	9/9	
3/4+3/16	15/16		
3/4+3/50	81/100		
3/4	3/4	3/4	
1/2+1/5	7/10		
1/2+1/10	3/5		
1/2+1/4+1/8	7/8		
1/2+1/8	5/8		
3/8	3/8		
1/2	6/12		
2/5+1/40	17/40		
1/3	1/3		
1/4	1/4	1/4	
1/5	1/5		
1/8	1/8		
1/20	1/20		

CARTÃO A1

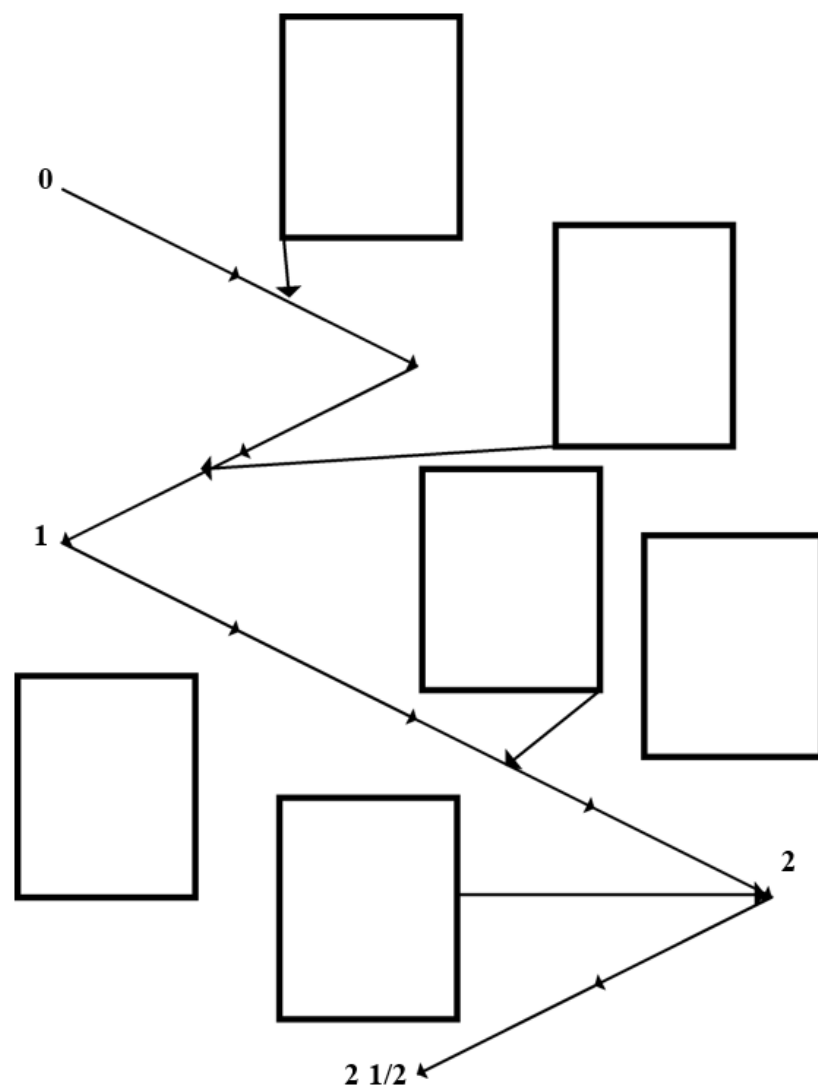


CARTÃO B1



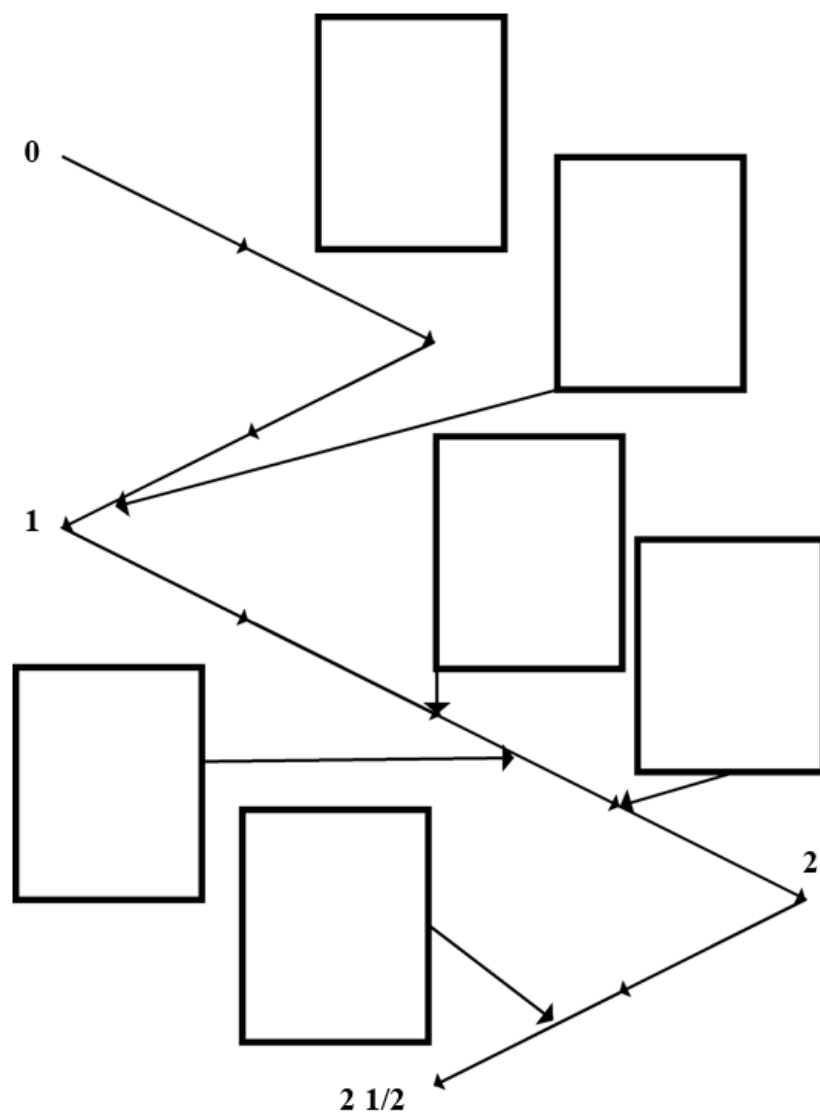
SUMÁRIO

CARTÃO C1

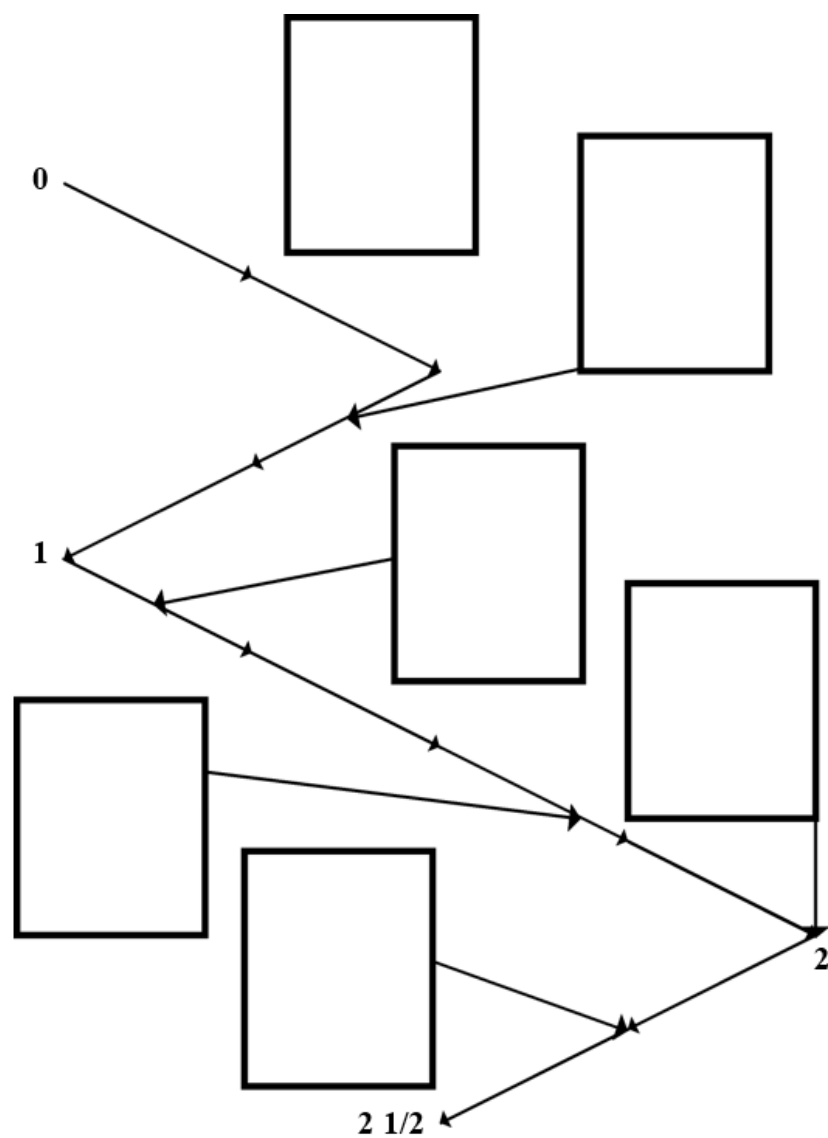


SUMÁRIO

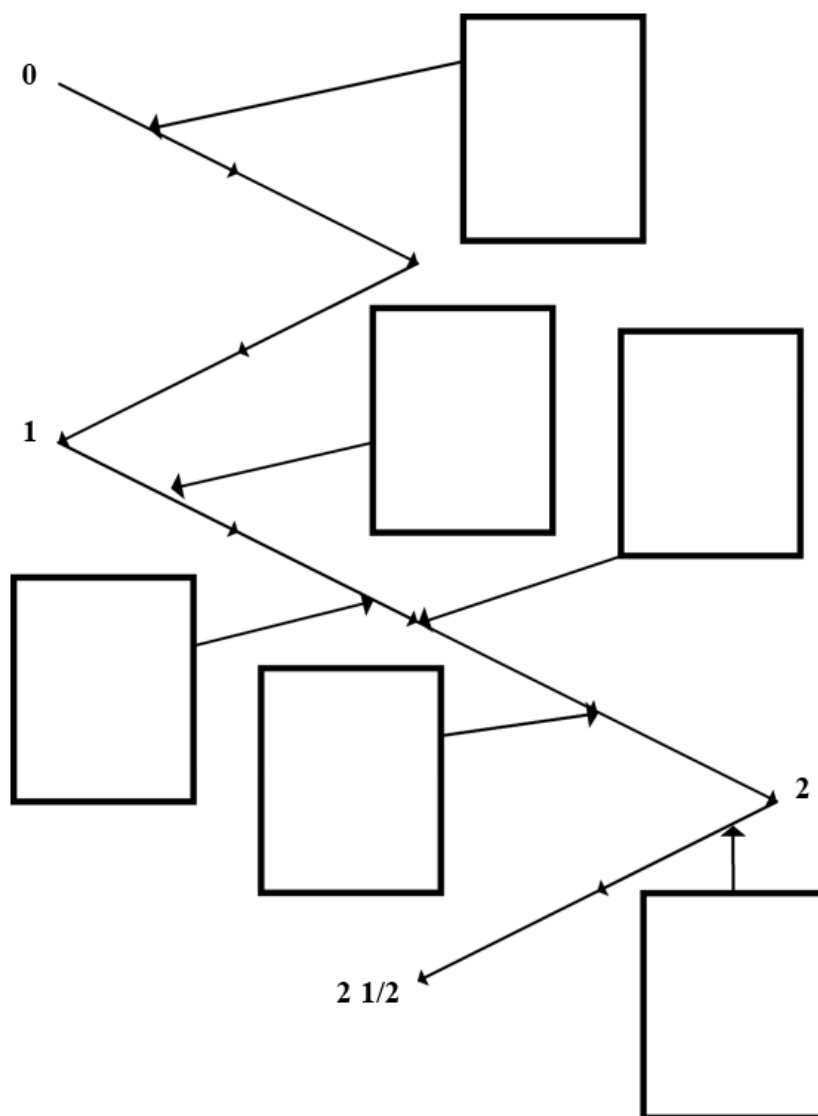
CARTÃO D1



CARTÃO A2

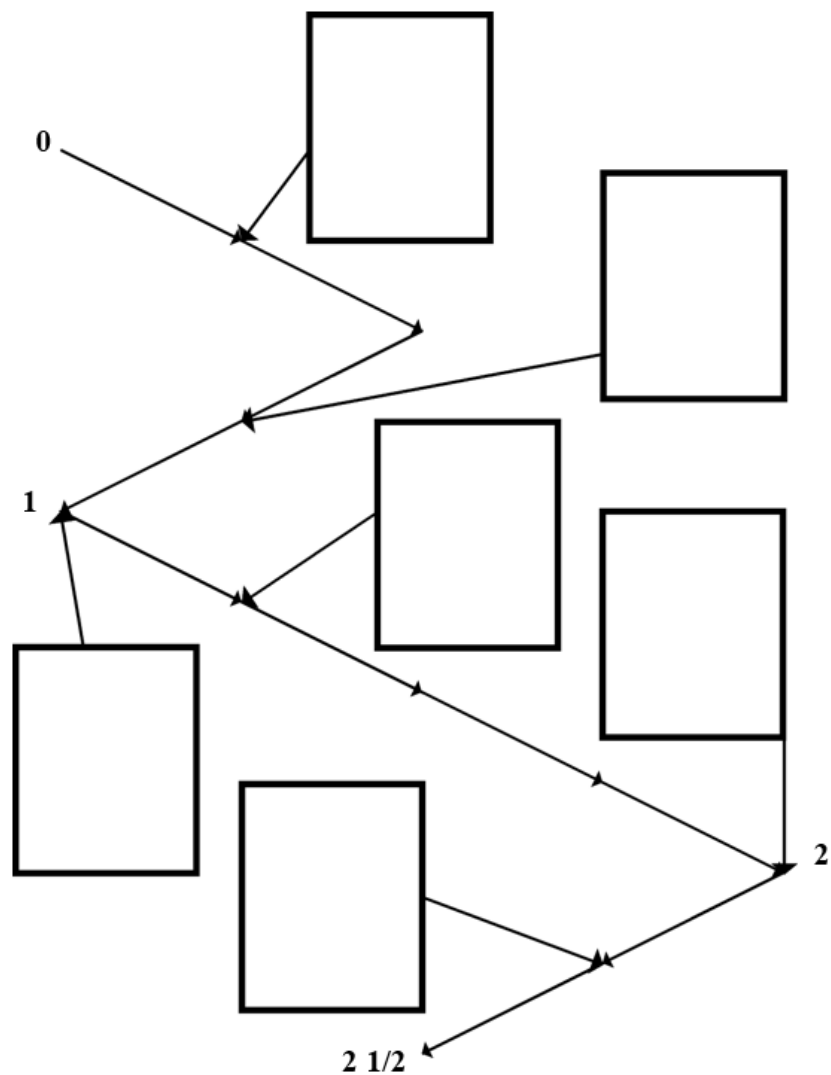


CARTÃO B2



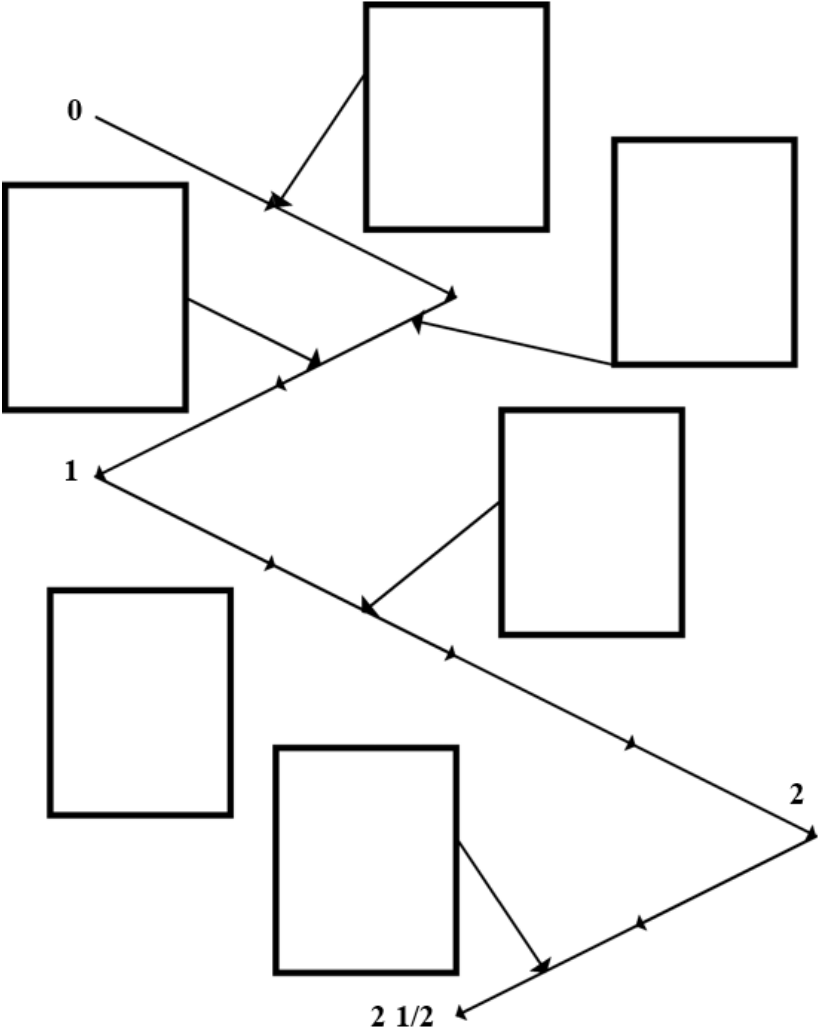
SUMÁRIO

CARTÃO C2



SUMÁRIO

CARTÃO D2



CARTAS

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{6}{12}$$

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{9}{9}$$

$$\frac{15}{8}$$

$$\frac{17}{8}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{19}{8}$$

$$\frac{11}{8}$$

$$\frac{21}{20}$$

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{17}{40}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{21}{16}$$

$$\frac{13}{8}$$

$$\frac{13}{8}$$

$$\frac{4}{2}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{11}{6}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{81}{100}$$

$$\frac{25}{6}$$

$$\frac{9}{5}$$

$$\frac{4}{2}$$

$$\frac{9}{4}$$

$$\frac{34}{20}$$

$$\frac{9}{8}$$

$$\frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{20}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{13}{8}$$

$$\frac{7}{4}$$

$$\frac{31}{12}$$

$$\frac{31}{16}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{29}{20}$$

$$\frac{19}{9}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{4}$$

$$\frac{8}{4}$$

$$\frac{9}{4}$$

$$\frac{5}{4}$$

J25- ORDENANDO FRAÇÕES

MATERIAL DA TURMA:

- Cópias da ficha com as peças do jogo, sendo uma cópia para cada grupo de 4 estudantes.
- Uma tira de papel pardo para cada grupo, sendo que uma folha pode ser dividida em 4 tiras.
- Tesoura e cola.

MATERIAL INDIVIDUAL:

- Bloco de anotações, lápis e borracha.
- Máquina de calcular (opcional).
- Cópia da ficha de exercícios (opcional).

METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO:

Este jogo pode ser explorado em três fases.

Primeira Fase

O jogo consiste na *organização* (linear, em tabelas ou outras) e na *ordenação* de todas as 60 frações que compõem o jogo. As frações são todas distintas, embora possa haver equivalências. Além disso, o grupo deverá *refletir e registrar* suas reflexões sobre as “**leis de ordenação**” de frações em diferentes níveis, ou seja, o grupo

deverá ser capaz de explicitar oralmente e por escrito quais os critérios usados na ordenação e quais as estratégias usadas para garantir uma ordenação completa das frações. Essa fase termina com a apresentação das frações ordenadas (coladas sobre a tira de papel pardo) para a turma. Sugerimos que todos os grupos apresentem seus trabalhos, antes de iniciar a fase seguinte.

A seguir apresentamos alguns exemplos das produções (de professores) dessa primeira fase, com os comentários e sugestões para o encaminhamento da fase seguinte.

Segunda Fase

Essa fase se inicia com a *análise dos trabalhos apresentados* pelos grupos por parte da turma e do professor. Agora que todos *ouviram* os vários critérios e as várias estratégias usadas por todos os grupos, a turma passa a analisar cada proposta. É o momento de discussões (argumentos e contra-argumentos) e de sugestões.

A turma, além de criticar e de elogiar, deverá, quando possível, propor sugestões para os grupos revisarem seus trabalhos. O trabalho continua com o registro dos critérios e estratégias usados na organização e ordenação das frações. Deve estar claro:

1. Quais as questões estratégicas (muitas vezes implícitas) que orientaram o trabalho. Por exemplo:
 - **Por onde começar?**

Identificar o maior? Identificar o menor? Identificar as equivalentes? Identificar as frações aparentes ($1/1$)?
 - **Quais classes (“grupos”) formar?**

Separar em próprias ($< 1/1$), impróprias ($> 1/1$; $= 1/1$)?

Separar por intervalos: ($1/8 < p/q < 1/4$), ($1/4 < p/q < 1/2$), ($1/2 < p/q < 1$) etc.

Separar por equivalentes? Separar por “mesmo numerador”?
Separar por “mesmo denominador”?

- **Qual “sistema” formar?**

Quais as “classes” que serão “combinadas”?

Organizar o sistema de forma linear, em tabela, vertical, horizontal etc.?

Obs.: É papel do professor orientar a explicitação dessas questões. Isso pode ser feito durante a análise das apresentações, em que o docente poderá organizar os comentários dos estudantes ou acrescentar questões que não tenham sido levantadas.

2. **Quais as “leis” de ordenação usadas pelo grupo e a validade das leis?**

O grupo deve explicitar como ordenou as frações. Isso deverá ser feito com: (a) exemplos numéricos e ilustrações; (b) generalizações descritivas e/ou simbólicas.

No caso de frações com o mesmo numerador, os estudantes devem explicitar qual a “regra” para ordenar as frações. Por exemplo: “Entre duas frações com o mesmo numerador (n), a maior será aquela com o menor denominador ou, de forma simbólica, $n/a > n/b$ se $a < b$ (no caso de n , a e b serem inteiros positivos)”.

Caso os estudantes estejam com dificuldade em compreender o que exatamente significa uma “lei (regra) de ordenação”, o caso acima pode ser discutido com a turma para esclarecimento. O professor poderá, então, levantar com a turma quais seriam os outros “casos” existentes (frações de mesmo denominador; frações com numeradores e denominadores diferentes). Essa fase será concluída com a apresentação e discussão das leis elaboradas pelos grupos.

Terceira Fase

A produção “final” desse trabalho envolve a *escritura* de um livro. Cada estudante deverá escrever um texto, orientando outros colegas na ordenação de frações. O manual deverá incluir todos os casos estudados e todas as conclusões do grupo. Esse trabalho poderá servir como: a) avaliação da produção individual do estudante, e b) instrumento de consulta do aluno em outras tarefas, exercícios e testes, envolvendo ordenação de frações.

Uma organização muito interessante foi apresentada por um grupo de professores (vide Grupo B a seguir). Nela, o grupo organizou uma tabela com colunas de frações equivalentes e todas as linhas ordenadas da menor para a maior fração. Essa organização explicitou algumas lacunas nas colunas de equivalência.

A tarefa era:

- Transferir as frações para uma linha numérica.
- Transformar, com ajuda de uma máquina de calcular, as frações em decimais. Em seguida, ordenar os decimais. Escrever um texto para ordenar decimais.
- Comparar as duas representações (frações e decimais) quanto à facilidade/dificuldade de ordenação.

Exemplos de Produções da Primeira Fase e Ficha de Exercícios

Lembramos que os resultados apresentados aqui foram obtidos numa oficina com professores durante a Semana da Matemática (1995), promovida pelo GEPEM e MEM (Mestrado em Educação Matemática – Universidade Santa Úrsula) e ministrada por Paulo H. Colonese e Lucia Maria Aversa Villela.

Grupo A

1:2	1:6	1:8			
2:5	2:12	2:16			
3:3	3:4	3:5	3:6	3:8	3:18
4:5	4:10	4:32			
5:5	5:6	5:10	5:40		
6:5	6:8	6:10	6:15	6:16	6:36
7:4	7:7	7:8	7:9	7:14	
8:10	8:20				
9:5	9:9	9:12	9:15	9:24	
10:12					
12:10	12:15	12:16	12:20	12:32	
14:8	14:16	14:18			
15:18					
16:20					
18:10	18:15				
20:24					
21:12	21:24	21:27			
24:20					
27:15					
28:16	28:32	28:36			
36:20					

HIPÓTESES DO GRUPO (APRESENTADAS ORALMENTE):

As frações foram ordenadas pela ordem **crescente de numeradores**, de 1 até 36, conforme as peças existentes no jogo. E, na mesma linha, pela ordem decrescente de frações (crescente de denominadores).

COMENTÁRIOS REALIZADOS:

Por que essa organização não é suficiente para *ordenar* todas as frações?

- Cada linha individualmente está ordenada.
- As colunas não estão ordenadas.
- Percebe-se algumas frações equivalentes em linhas diferentes. Quais outras possibilidades podemos sugerir para o grupo investigar?
- Ordenar pela ordem crescente de denominadores.
- Investigar as classes de equivalência.

Grupo B

1:8	1:6			1:2										
2:16	2:12		2:5											
	3:18	3:8		3:6	3:5	3:4					3:3			
4:32			4:10					4:5						
5:40				5:10					5:6		5:5			
	6:36	6:16	6:15		6:10	6:8					6:6	6:5		
							7:9			7:8	7:7		7:4	
			8:20					8:10						
		9:24			9:15	9:12								9:5
									10:12					
		12:32			12:20	12:16		12:15				12:10		
							14:18			14:16			14:8	
									15:18					
								16:20						
												18:15		18:10
									20:24					
							21:27			21:24			21:12	
											24:20			
														27:15
							28:36			28:32			28:16	
														36:20

HIPÓTESES E MÉTODO (APRESENTADOS ORALMENTE):

- O grupo identificou as frações equivalentes, organizando-as em colunas. Identificaram para cada classe de equivalência, 4 elementos.
- Organizou as frações equivalentes por ordem de numerador ($1/$; $2/$; $3/$; etc.).
- Percebeu que as frações equivalentes poderiam ser pensadas como “múltiplos de uma fração”.
- Organizou uma tabela indicando quais são os múltiplos que aparecem no jogo e quais estão faltando.
- Para comparar frações com o mesmo numerador (linha), basta observar o denominador: quanto menor o denominador, maior é a fração.
- No caso de mesmo denominador, basta procurar qual possui o maior numerador.
- No caso de frações com numeradores e denominadores diferentes, temos que procurar: a) uma fração equivalente com o mesmo numerador que a outra, ou b) uma fração equivalente com o mesmo denominador que a outra.

Se não existir esses valores na tabela anterior, teremos que determinar a fração equivalente necessária. Nesse caso, por exemplo, basta multiplicar numerador e denominador de uma das frações pelo fator entre os dois denominadores.

COMENTÁRIOS:

- Este texto poderia ser enriquecido com mais detalhes, apresentando exemplos empíricos ilustrativos e dando maior destaque às “leis” de comparação.

Grupo C

1:2	1:6	1:8			
2:5	2:12	2:16			
3:3	3:4	3:5	3:6	3:8	3:18
4:5	4:10	4:32			
5:5	5:6	5:10	5:40		
6:5	6:8	6:10	6:15	6:16	6:36
7:4	7:7	7:8	7:9	7:14	
8:10	8:20				
9:5	9:9	9:12	9:15	9:24	
10:12					
12:10	12:15	12:16	12:20	12:32	
14:8	14:16	14:18			
15:18					
16:20					
18:10	18:15				
20:24					
21:12	21:24	21:27			
24:20					
27:15					
28:16	28:32	28:36			
36:20					

HIPÓTESES E MÉTODO (ESCRITOS PELO GRUPO):

- Ordenamos levando em consideração os numerais dos numeradores. Em seguida, organizamos ao lado os denominadores, também em ordem crescente.

- Verificamos qual é a fração menor e qual é a maior.
- Anotamos num papel extra as frações equivalentes.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES:

- Por que essa organização não é suficiente para *ordenar* todas as frações?
- Seria necessário reunir as conclusões acima e as conclusões sobre as frações equivalentes mencionadas pelo grupo.
- Explicitar melhor como “verificamos qual a fração menor e qual a maior”
- Descrever como identificaram as frações equivalentes.
- Reordenar as frações novamente, adotando outros critérios.

Grupo D

1:8	4:32	2:16	5:40	< 1/2
1:6	2:12	3:18	6:36	
3:8	6:16	9:24	12:32	
2:5	4:10	6:15	8:20	
1:2	3:6	5:10	7:14	1/2
3:5	6:10	9:15	12:20	< 1
3:4	12:16	9:12	6:8	
7:9	14:18	28:36	21:27	
4:5	8:10	12:15	16:20	
5:6	10:12	15:18	20:24	1/1
7:8	14:16	21:24	28:32	
3:3	5:5	6:6	7:7	
6:5	12:10	18:15	24:20	
7:4	14:8	21:12	28:16	> 1
9:5	18:10	36:20	27:15	

INSTRUÇÕES (ESCRITAS PELO GRUPO):

- Separar as frações irredutíveis.
- Achar as classes de equivalência.
- Ordenar as classes de equivalência em ordem crescente.
- Separar os grupos de frações: primeiro (próprias), segundo (aparentes) e terceiro (impróprias).

COMENTÁRIOS:

- Descrever com mais detalhes e exemplos o que significa: “separar as frações irredutíveis”; “achar as classes de equivalência”, etc.
- Qual é o papel de 1 e de 1/2 na “organização das frações pelo grupo”?

Grupo E

9:5	18:10	27:15	36:20
7:4	14:8	21:12	28:16
6:5	12:10	18:15	24:20
3:3	5:5	6:6	7:7
7:8	14:16	21:24	28:32
5:6	10:12	15:18	20:24
7:9	14:18	21:27	28:36
4:5	8:10	12:15	16:20
3:4	8:9	9:12	12:16
3:5	6:10	9:15	12:20
1:2	3:6	5:10	7:14
2:5	4:10	6:15	8:20
3:8	6:16	12:32	9:24
1:6	2:12	3:18	6:36
1:8	2:16	4:32	5:40

CRITÉRIOS USADOS PELO GRUPO:

- Identificamos as classes de equivalência.
- Comparamos as frações usando os elementos das classes.

COMENTÁRIOS:

- Descrever com mais detalhes e exemplos o que significa: “identificar as classes de equivalência”, “comparar as frações usando os elementos das classes” etc.
- Escrever um texto sobre o tema “Manual de Ordenação de Frações” para ser usado pelo grupo e pela turma em futuros exercícios, atividades e testes, como instrumento de consulta.

Grupo F

9:5	18:10	27:15	36:20
7:4	14:8	21:12	28:16
6:5	12:10	18:15	24:20
3:3	5:5	6:6	7:7
3:4	6:8	9:12	12:16
1:2	3:6	5:10	7:14
7:8	14:16	21:24	28:32
5:6	10:12	15:18	20:24
7:9	14:18	21:27	28:36
4:5	8:10	12:15	16:20
3:5	6:10	9:15	12:20
2:5	4:10	6:15	8:20
3:8	6:16	9:24	12:32
1:6	2:12	3:18	6:36
1:8	2:16	4:32	5:40

COMENTÁRIOS:

- O grupo não descreveu o seu processo de trabalho, nem suas conclusões.
- Fazer um primeiro esboço de um texto que descreva as discussões e conclusões do grupo: Quais questões o grupo se fez? Como começou? etc.
- As linhas seriam classes de equivalência?
- A primeira coluna está totalmente ordenada (do maior para o menor)? Verifique e reorganize-a, se necessário.

FICHA DE EXERCÍCIOS

Complete as lacunas com p/q , sendo p e q inteiros positivos quando possível.

1:8	1:6			1:2										
2:16	2:12		2:5											
	3:18	3:8		3:6	3:5	3:4					3:3			
4:32			4:10					4:5						
5:40				5:10				5:6		5:5				
	6:36	6:16	6:15		6:10	6:8				6:6	6:5			
							7:9		7:8	7:7		7:4		
			8:20					8:10						
		9:24			9:15	9:12							9:5	
								10:12						
		12:32			12:20	12:16		12:15				12:10		
							14:18			14:16			14:8	
								15:18						
							16:20							

												18:15		18:10
								20:24						
						21:27			21:24				21:12	
												24:20		
														27:15
						28:36			28:32			28:16		

PEÇAS DO JOGO - PARTE A

1:8	1:6	3:8	2:5	1:2	2:16
2:12	6:16	4:10	3:6	4:32	3:18
9:24	6:15	5:10	5:40	6:36	12:32
8:20	7:14	3:4	3:5	7:9	4:5
5:6	6:8	6:10	14:18	8:10	10:12

PEÇAS DO JOGO - PARTE B

9:12	9:15	21:27	12:15	15:18	12:16
12:20	28:36	16:20	20:24	7:8	3:3
6:5	7:4	9:5	14:16	7:7	12:10
14:8	18:10	21:24	5:5	18:15	21:12
27:15	28:32	9:9	24:20	28:16	36:20

ORDENANDO FIGURAS: QUAL É A MAIOR? QUAL É A MENOR?

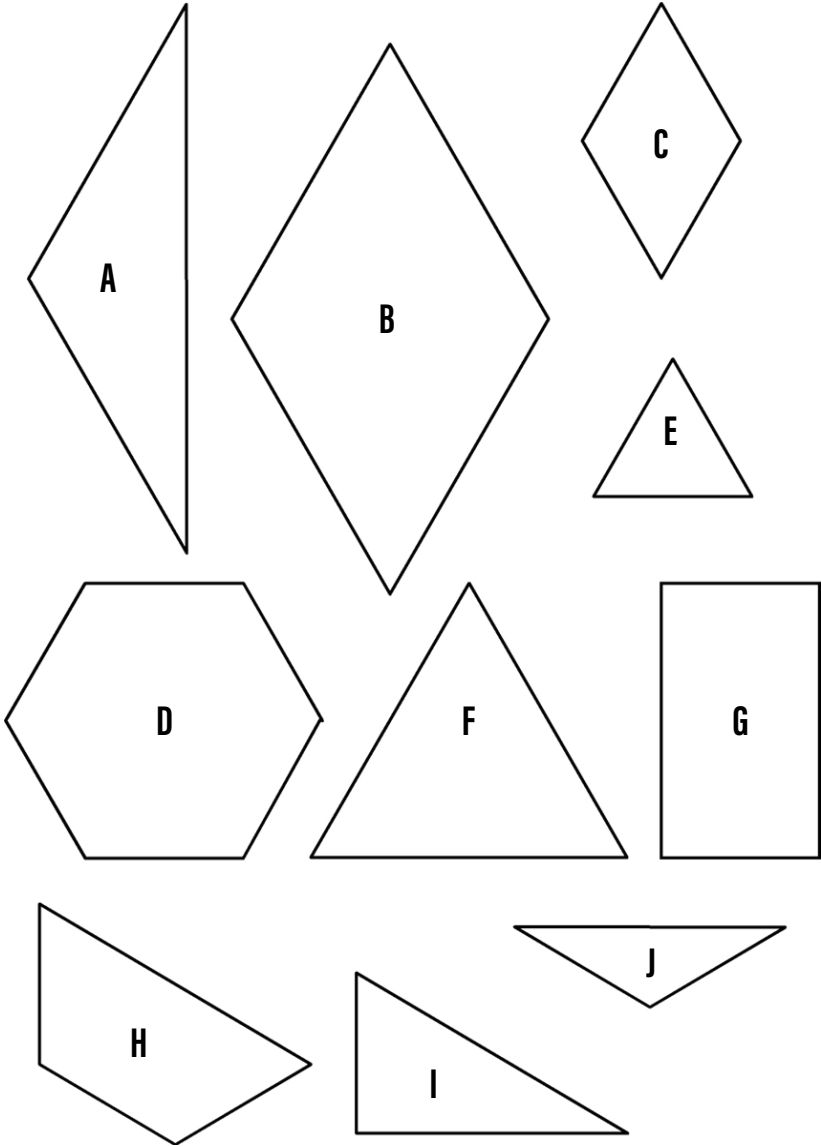
Recorte as figuras da próxima página e use-as nas seguintes atividades:

- Elabore um método para ordenar as formas da menor área para a maior área. Você não pode usar régua, compasso ou qualquer fórmula de área. Explique o seu procedimento: (a) qualitativamente e (b) quantitativamente.
- Usando as letras correspondentes para representar a área das figuras, expresse as relações entre as áreas das diversas formas. Sintetize as informações na forma de uma tabela, como a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1	1/2								
B	2	1								
C			1							
D				1						
E					1					
F						1				
G							1			
H								1		
I									1	
J										1

Nesse caso, 1 representa que $A = 1 A$; 2 significa que $B = 2 A$; $1/2$ que $B = (1/2) A$ e assim por diante.







CONSIDERAÇÕES FINAIS

OS ALUNOS APRENDEM NUMA
PROPOSTA PEDAGÓGICA SÉRIA COM
JOGOS E ATIVIDADES MANIPULATIVAS

“Devemos propor trabalhos nos quais o aluno possa visualizar no material a solução ou ter o auxílio para obter a resposta. E podemos acrescentar questões novas e incentivá-lo a transcrever e comunicar suas observações.” Ana Isabel

O docente deve priorizar a utilização de jogos e atividades que exploram inicialmente as ideias mais simples de fração. Por isso, propomos jogos variados (de cartões, formas, Tangrans, malhas, geoplano e dominós de identificação). Assim, vamos reconhecendo e trabalhando os diversos significados, além de enriquecermos a construção conceitual com elementos cotidianos e linguísticos.

É bom lembrar que num trabalho sobre os diferentes significados das frações é importante que o professor use em sua aula: *situações do mundo real* (calendário, compras etc.), *símbolos escritos e pictóricos* (flechas, operadores, $9/b$ etc.), *expressões orais* (metade de; três de quatro; etc.) e *representações gráficas* (de setores, barras, reta numérica, bolas etc.).

A aritmética fracionária envolve elementos de medida e não somente a partição da unidade. Assim, deve-se produzir significado para as operações com frações associando o denominador comum à ideia de unidade comum a duas medidas dadas e que possibilita a sua comparação. Nesse processo, o conceito de equivalência e os procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para a resolução de situações-problema que envolvem a comparação de frações.

As dificuldades associadas à construção do conceito de fração são de dois tipos: psicológicas ou epistemológicas. No primeiro caso, a construção da ideia de unidade e a sua variabilidade, tanto em problemas resultantes das subdivisões simples quanto, posteriormente, na aceitação da densidade (entre duas frações sempre há

uma outra), que apresenta situações implícitas com a noção de infinito (Kindel, 1998). Poderia incluir também a dificuldade em reconhecer frações de uso não cotidiano que correspondem a interpretação da fração com a divisão e, nesse caso, a aceitação do resíduo como uma parte do divisor. A essas dificuldades, juntam-se os diversos significados da fração. Entre as dificuldades epistemológicas podemos ressaltar: duas frações, embora escritas diferentemente, têm o mesmo valor; a incorporação da ideia de razão-proporção com a fração; e o reconhecimento e aceitação da fração com um número, chamando a atenção do aluno para a existência e especificidade de outro campo numérico. Enfim, desenvolver um trabalho global e integrador deve ser objeto de atenção docente.

Sendo assim, é importante ressaltar que a utilização de uma tarefa “bem planejada” ou um recurso “didaticamente elaborado” não implica na aprendizagem. A inovação das aulas através de uma variedade de atividades e materiais didáticos é importante, porém não será a mera adoção deles que resolverá a problemática e a complexidade da construção do conhecimento. Os recursos possuem limitações, potencialidades e, assim, contribuem diferentemente na constituição e significação dos conceitos matemáticos.

Desse modo, professor e aluno podem estabelecer uma efetiva comunicação em determinada atividade, por mais simples que seja. Assim, no complexo binômio ensinar-aprender, é imprescindível o professor tornar-se um sujeito que também aprende continuamente a partir das contribuições (perguntas, respostas, sugestões, facilidades, dificuldades etc.) dos seus alunos e da dinâmica colaborativa de trabalho estabelecida com eles.

POSFÁCIO

Marcelo Bairral e Joaquin Giménez, nesta publicação, apresentam uma discussão teórica consistente sobre o conceito de fração, ao mesmo tempo em que oferecem sugestões de jogos e atividades que abordam a ludicidade com qualidade e profundidade. Uma característica especialmente relevante deste material é o fato de que os jogos estão prontos para serem reproduzidos e utilizados diretamente com os estudantes, o que o torna de grande utilidade para apoiar a rotina exigente e multifacetada dos professores da Educação Básica.

Este livro promove uma rica articulação entre teoria e prática, em um contexto contemporâneo no qual o uso excessivo de telas tem sido amplamente questionado por pesquisadores e profissionais da área da saúde. Nesse cenário, materiais manipuláveis e jogos (re) surgem como alternativas valiosas para equilibrar a presença das tecnologias digitais no ambiente escolar, favorecendo aprendizagens significativas por meio da ação, da experimentação e da ludicidade.

Dentre os jogos propostos, destaca-se o **Jogo das Famílias**, que estimula a formação de diferentes representações de frações em variados contextos. Outro ponto forte da obra é a ênfase na relação parte-todo, considerando tanto os casos de todos discretos quanto contínuos. Além disso, o livro explora a representação das frações na reta numérica, ampliando as possibilidades de compreensão e construção do significado desse conceito fundamental da matemática.

Uma proposta especialmente interessante é o **Jogo com Cartas**, que associa representações fracionárias ao Material Dourado planejado, com destaque para as frações decimais. A obra também trabalha com diversas formas geométricas – como o círculo, o retângulo, o hexágono e o quadrado –, promovendo a construção da relação parte-todo em diálogo com a composição e decomposição de figuras, o que amplia o repertório visual e conceitual dos estudantes.

Ao todo, o professor tem à sua disposição **25 jogos** apresentados de forma clara e acessível, com amplas possibilidades de adaptação. Essa abordagem aberta permite que os docentes construam propostas de atividades e tarefas de maneira autoral, apropriando-se do material com criatividade e intencionalidade pedagógica. Os **Cartões com Coleções**, por exemplo, possibilitam o estudo de frações associadas a quantidades discretas e à ideia de parte de um todo contínuo, o que contribui para uma compreensão mais abrangente e contextualizada.

Embora o uso de frações no cotidiano seja, em geral, restrito a casos simples – como meios, terços, quartos e oitavos –, a compreensão profunda do conceito é essencial para os estudos matemáticos em níveis mais avançados. Valorizar o entendimento conceitual das frações, em suas múltiplas representações e significados, deve, portanto, ser um objetivo central no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Este livro, ao integrar fundamentação teórica sólida com práticas didáticas envolventes, oferece aos professores não apenas um conjunto de recursos prontos para uso, mas também uma inspiração para inovar no ensino de frações, promovendo uma aprendizagem mais ativa, crítica e prazerosa.

Rosana de Oliveira

*Professora Associada da Universidade
do Estado do Rio de Janeiro
Professora do PPGEM/UFJF*

REFERÊNCIAS

ALSINA, C.; FORTUNY, J. M.; GIMÉNEZ, J. **Bon día Mates 12-14**. Barcelona: Dept. de Ensenyament. Generalitat Catalunya, 1992.

BAIRRAL, M.; BARBOSA, A. M.; OLIVEIRA, R.; SILVA, A. L. **Instrumentação do Ensino de Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2005.

BELL, A.; BEEDY, T. **Two approaches to the teaching of decimal multiplication**. Nottingham: University of Nottingham, 1983.

BOERO, P. **Progetto Genova 3a,4a, 5a**. Genova: Raporto di lavoro, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

CENTENO, J. **Números decimales**. Madrid: Síntesis, 1988.

FILLOY, FIGUERAS e VALDEMOROS. Algunas consideraciones acerca de la representación gráfica de las fracciones y su interpretación. *In*: ANNUAL MEETING OF THE PME-NORTH AMERICA CHAPTER, 8, 1986, East Lansing, Michigan. **Proceedings** [...]. East Lansing: PME-NA, 1986. p. 78-83.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phaenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.

GIMÉNEZ, J. Números Racionais. **Seminário Interno MEM/USU**, Rio de Janeiro, 1994.

GIMÉNEZ, J. **Innovación metodológica del número racional positivo**. 1991. Tese (Doutorado em Educação Matemática) –Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1991.

GIMÉNEZ, J. **Frações a 8è EGB**. Tarragona: Dept. Educació i Psicologia, Divisió VII, 1989.

HART, K. The understanding of fractions in the secondary school. *In*: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 2., 1978, Osnabrück. **Proceedings** [...]. Osnabrück, 1978.

KERSLAKE, D. **Fractions**. London: NFER Nelson, 1986.

KIEREN, T. Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. /n: BEHR, M; HERBERT, J. (ed.). **Number, Concepts and Operating in the Middle Grades**. Reston: NCTM/LEA, 1988.

KIEREN, T. Knowing rational numbers: ideas and symbols. /n: LINDQUIS, M. **Selected issues in mathematics education**. NCTM: Reston VA, 1980. p. 69-81.

KIEREN, T.; PIRIE, S. Recursion and the mathematical experience. /n: STEFFE, L. (ed.). **Epistemological foundations of the mathematical experience**. New York: Springer Verlag, 1990.

KINDEL, D. S. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

LLINARES, S.; SANCHEZ, M. V. **Fracções**. Madrid: Síntesis, 2000.

LINS, R. C.; GIMÉNEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOVELL, K. **The growth of basic mathematical and scientific concepts in children**. London: Hodder & Stoughton, 1961.

NOELTING, G. The Development of Proportional Reasoning in the Child and Adolescent though Combination of Logic and Arithmetic. /n: COHORS-FRESENBORG, E.; WACHSMUTH, I. (ed.). **Osnabrücker Schriften zur Mathematik**. Osnabrück: Universidade de Osnabrück, 1978a. p. 242-278.

NOELTING, G. **Constructivism as a Model for Cognitive Devopment and (Eventalli) Learning**. Quebec: Universite Laval, 1978b.

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept: problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, p.331-363, 1980.

NOELTING, G. **Le developpment cognitif et le mecanisme de l'équilibration**. Québec: Gaëtan Morin, 1982.

POWELL, A. B.; SOUZA, M. A. V. F. de. "Não tem partes iguais!": Como professores entendem uma fração unitária. /n: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEM, 9., 2024, Natal. **Anais [...]**. Natal, 2024.

RICO, L. El concepto de fracción en el Ciclo Medio. **Apuntes de Educación**, Madrid, n. 6, 1982.

ROMBERG, T. *et al.* **Rational numbers**. New Jersey: LEA, 1992.

SANTOS V. M. P.; REZENDE, J. F. (coord.) **Números: linguagem universal**. Rio de Janeiro: IM/ UFRJ, 1996.

SOUZA, M. A. V. F. de. Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 79, p. 86-100, 2021.

SOUZA, M. A. V. F. de; POWELL, A. B. **Operações com frações à moda antiga**. Ponta Grossa: Atena, 2025. DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.026353004>. Disponível em: <https://atenaeditora.com.br/index.php/catalogo/ebook/operacoes-com-fracoes-a-moda-antiga>. Acesso em: 12 jul. 2025.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a Crianças: Alternativas Pedagógicas em Sala de Aula. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 43, p. 11-48, 2003.

STREEFLAND, L. **Fractions**. Dordrecht: Kluwer, 1992.

STREEFLAND, L. Free Production of Fraction Monographs. In: BERGERON, J. N.; Herscovics e C. Kieran (ed.). **Psychology of Mathematics Education: PME-XI**. vol. 1. Montreal: IGPME, 1987. p. 405-410.

TINOCO, L.A. e LOPES, M.L.M.L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 2, p. 13-18, 1994.

SOBRE OS AUTORES



Joaquin Giménez

Professor catedrático da Universidade de Barcelona. Membro do CIEAEM (The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching). Pesquisador com intercâmbio internacional em diferentes países, dentre eles Brasil, Canadá, Chile, Colombia, EUA, Israel, Itália, Portugal etc. Foi editor da UNO (Revista de Didáctica de las matemáticas) e da DIDACTICAE. Membro do subgrupo Mathematics Education of the Research Group "Teaching and Virtual Learning – GREAV" (Grupo de Investigación Ensino e Aprendizagem Virtual) da Universidade de Barcelona desde 1994. (<http://greavub.edu/eng/>).

quimgimenez@ub.edu

<https://www.researchgate.net/profile/Joaquin-Gimenez>



Marcelo Bairral

Professor titular da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Doutor em Educação Matemática (EM) pela Universidade de Barcelona. Realizou estágio pós-doutoral em EM na Rutgers University (EUA), na Universidade de Turin (Itália) e na Universidade Claude Bernard (França). Preside o Gepem desde 2003 e é o editor do Boletim Gepem. Fundador (em 1999) e coordenador do Grupo de Estudos e Pesquisas das TICs em Educação Matemática. Foi coordenador e atua como docente do Programa de Pós-Graduação (PPG) em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc). É também professor do PPG em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT). Atua em educação matemática nos seguintes temas: interações em ambientes virtuais, tecnologias e formação de professores, aprendizagem matemática em dispositivos móveis com toques em tela, inovações curriculares em geometria. Foi coordenador do GT19 (Educação Matemática) da ANPEd e membro da coordenação do GT6 (Ed. Matemática, Tecnologias Digitais e EaD) da SBEM. Foi presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, foi coordenador de grupos temáticos do ICME (2021, 2024) e integrou o CA-Educação do CNPq. Integra o CIEAEM desde julho de 2013 e em agosto de 2023 passou a integrar o grupo de representante do Brasil no CIEAEM.

mbairral@ufrj.br

<http://lattes.cnpq.br/0159010164759435>

www.gepeticem.ufrj.br

<https://ufrj.academia.edu/MBairral>

<https://orcid.org/0000-0002-5432-9261>

<https://www.researchgate.net/profile/Marcelo-Bairral-2>

<https://www.webofscience.com/wos/author/record/JYQ-1199-2024>

SUMÁRIO

ÍNDICE REMISSIVO

A

ampliação 29, 30, 37, 39, 231

aprendizagem 12, 13, 15, 18, 34, 54, 224, 226, 231

C

cálculo mental 89, 147

cartas com frações 184, 190

cartões 57, 66, 107, 130, 135, 136, 192, 193, 223, 231

círculo 71, 72, 74, 80, 81, 82, 118, 225, 231

comparação de frações 38, 223, 231

comparações 11, 30, 33, 37, 48, 93, 231

composição 85, 102, 124, 129, 225

conceito de fração 85, 86, 223, 225, 231

conceitos matemáticos 17, 224

conhecimento 15, 17, 18, 22, 28, 36, 38, 43, 46, 48, 104, 136, 224, 231

D

decimal 18, 31, 42, 43, 152, 159, 227, 231

decomposição 85, 102, 136, 225

denominador 17, 19, 20, 24, 25, 35, 39, 42, 43, 48, 50, 51, 52, 71, 94, 107, 111, 130, 208, 212, 223, 231

denominador comum 39, 48, 51, 223, 231

dificuldades 24, 42, 46, 47, 48, 223, 224, 231

divisão 18, 24, 28, 31, 40, 52, 94, 147, 152, 153, 161, 224, 231

divisão de frações 147

dodecágono 109, 111, 112

Dominó de Identificação 55, 115, 118, 120, 123, 127, 231

E

Educação Matemática 9, 12, 13, 14, 37, 54, 209, 227, 228, 231

ensino-aprendizagem 18, 54, 231

Ensino Fundamental 12, 14, 17, 30, 73, 231

equivalência 21, 28, 31, 34, 36, 37, 38, 46, 47, 71, 74, 85, 86, 93, 94, 95, 124, 209, 211, 212, 215, 216, 217, 223, 231, 232

estimativas 11, 33, 40, 231

experiência 83, 85, 231

F

figuras planas 86

fração 11, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 34, 36, 37, 38, 40, 42, 56, 58, 72, 73, 81, 82, 84, 85, 86, 91, 92, 93, 95, 103, 107, 112, 114, 115, 116, 118, 120, 121, 123, 127, 130, 135, 152, 153, 159, 161, 168, 184, 190, 192, 209, 212, 214, 223, 224, 225, 229, 231

frações equivalentes 111, 123, 127, 209, 211, 212, 214, 223, 231

frações irredutíveis 114, 115, 118, 120, 215

frações negativas 184, 190

frações unitárias 42, 43

G

geoplano 107, 108, 109, 110, 111, 112, 223, 231

gráfico 14, 15, 72, 114, 123, 127, 231

H

hexágono 94, 95, 103, 109, 111, 112, 135, 136, 225

I

instrumentos 15, 30, 231

J

jogos 11, 12, 13, 14, 38, 53, 83, 96, 113, 114, 147, 152, 160, 190, 222, 223, 225, 226, 231

L

largura 27, 231

livros 12, 231

M

matemática 12, 13, 14, 15, 17, 38, 54, 167, 225, 231
medida 24, 25, 26, 29, 30, 31, 39, 42, 56, 71, 86, 94, 105, 223, 229, 231, 232
medidas 25, 27, 29, 40, 41, 42, 57, 84, 102, 223, 231

N

número decimal 152, 159
número racional 34, 227
números racionais 12, 13, 46, 231

O

operações 85, 86, 135, 143, 180, 223, 231
operador 17, 18, 19, 27, 28, 29, 39, 56, 231
ordenação de frações 209, 231

P

partes iguais 22, 23, 24, 25, 31, 49, 71, 86, 87, 94, 106, 107, 108, 109, 184, 229, 231
partições 30, 34, 38, 57, 231
porcentagem 24, 28, 231
probabilidade 24, 29, 39, 46, 47, 231
professor 12, 29, 30, 40, 48, 54, 207, 208, 223, 224, 226, 232
proporção 27, 31, 37, 224, 232

Q

quadrado 65, 104, 105, 112, 115, 130, 159, 225

R

razão 37, 39, 40, 46, 47, 48, 224, 232
redução 37, 39, 232
relação parte-todo 225, 232
relações de equivalência 71, 93, 232
repartição 22, 23, 24, 28, 35, 40, 232
representação 25, 26, 28, 29, 30, 36, 38, 42, 43, 46, 56, 71, 84, 114, 115, 116, 118, 119, 130, 152, 160, 193, 225, 232
representação fracionária 29, 232
representações gráficas 114, 119, 135, 192, 223, 232
resto 24, 31, 39, 232
retângulo 56, 57, 86, 225
reta numérica 11, 33, 36, 38, 192, 193, 223, 225, 232

S

situações-problema 223, 232
subdivisões 25, 50, 94, 95, 223, 232

T

TANGRAM 55, 83, 102, 104, 105, 232
triângulo 86, 90, 91, 92, 102, 103, 104

U

unidade de medida 26, 105, 229, 232

www.PIMENTACULTURAL.com

FRACÇÕES NO CURRÍCULO DO ENSINO FUNDAMENTAL

conceituação, jogos
e atividades lúdicas



UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

