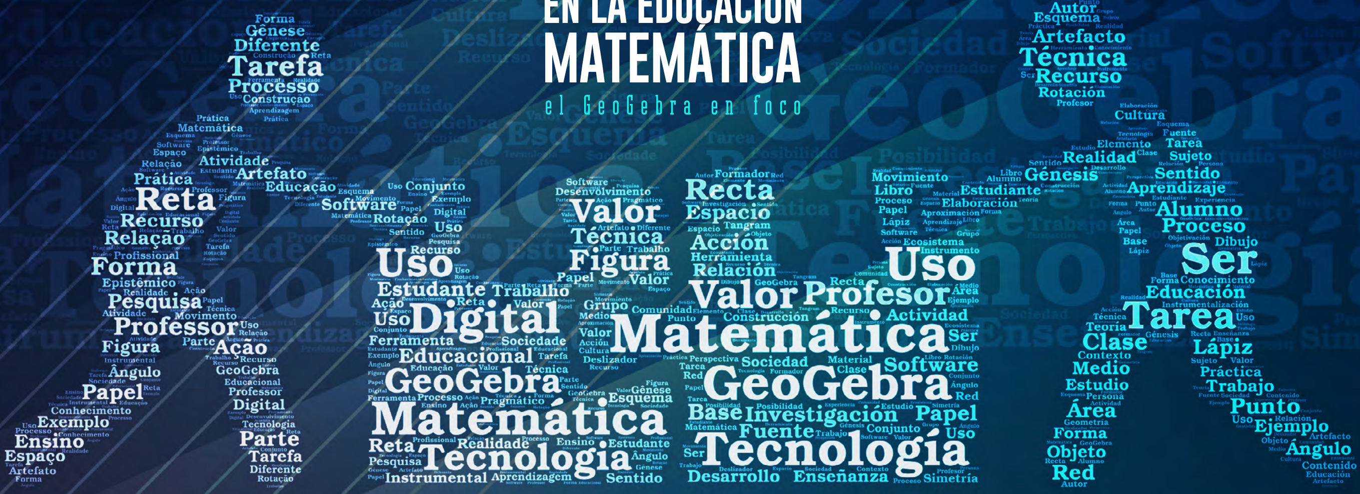
organizadores
Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EM PESQUISAS QUE ENVOLVEM TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

o GeoGebra em foco

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EN INVESTIGACIONES QUE INVOLUCRAN TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

el GeoGebra en foco



pimenta cultural

organizadores
Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EM PESQUISAS QUE ENVOLVEM TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

o GeoGebra em foco

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EN INVESTIGACIONES QUE INVOLUCRAN TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

el GeoGebra en foco

| São Paulo | 2020 | pimenta cultural

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

PARECERISTAS E REVISORES(AS) POR PARES

Avaliadores e avaliadoras Ad-Hoc

PARECER E REVISÃO POR PARES

Os textos que compõem esta obra foram submetidos para avaliação do Conselho Editorial da Pimenta Cultural, bem como revisados por pares, sendo indicados para a publicação.

Direção editorial	Patricia Bieging Raul Inácio Busarello
Diretor de sistemas	Marcelo Eyng
Diretor de criação	Raul Inácio Busarello
Assistente de arte	Ligia Andrade Machado
Imagens da capa	Acervo dos autores Starline - Freepik.com
Editora executiva	Patricia Bieging
Assistente editorial	Peter Valmorbida
Revisão	Elita de Medeiros
Organizadores	Maria Ivete Basniak Sergio Rubio-Pizzorno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P467 Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco. Maria Ivete Basniak, Sergio Rubio-Pizzorno - organizadores. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020. 322p..

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-65-5939-047-2 (eBook)

1. Educação. 2. Matemática. 3. Metodologia. 4. Tecnologia. 5. Meios Digital. I. Basniak, Maria Ivete. II. Rubio-Pizzorno, Sergio. III. Título.

CDU: 519.6
CDD: 510

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472

PIMENTA CULTURAL
São Paulo - SP
Telefone: +55 (11) 96766 2200
livro@pimentacultural.com
www.pimentacultural.com

2 0 2 0

Agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro recebido.

SUMÁRIO

Apresentação 14
Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

Prefácio 20
Marcelo Almeida Bairral

Capítulo 1
Contribuições da Teoria da Objetivação ao estudo da aprendizagem geométrica em contextos de Elaboração de Simuladores com o GeoGebra 23
Juan Luis Prieto G.
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo
Irene Victoria Sánchez-N.
Stephanie Díaz-Urdaneta
Ivonne C. Sánchez-S.
Luis Andrés Castillo B.

Capítulo 2
Aproximação Instrumental:
sua origem e seu desenvolvimento no Peru 45
Daysi Julissa García-Cuéllar
Jesús Victoria Flores Salazar

Capítulo 3
A Gênese Documental como aporte teórico-metodológico para pesquisas sobre desenvolvimento profissional docente e tecnologia 67
Maria Ivete Basniak
Everton José Goldoni Estevam

Capítulo 4
Movimentos, Pensamentos e GeoGebra:
alguns aspectos neurocientíficos no ensino
e aprendizagem da Matemática 96
Humberto José Bortolossi

Capítulo 5
Ecossistemas Educacionais Híbridos
na pesquisa em Educação Matemática...................................... 118
Sergio Rubio-Pizzorno
Gisela Montiel Espinosa

Sobre os organizadores... 158

Sobre os autores e as autoras.. 159

Índice remissivo.. 320

SUMARIO

Prefacio 166
Marcelo Almeida Bairral

Presentación 169
Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

Capítulo 1
Contribuciones de la Teoría de la Objetivación al estudio del aprendizaje geométrico en contextos de Elaboración de Simuladores con GeoGebra 175
Juan Luis Prieto G.
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo
Irene Victoria Sánchez-N.
Stephanie Díaz-Urdaneta
Ivonne C. Sánchez-S.
Luis Andrés Castillo B.

Capítulo 2
Aproximación instrumental: sus orígenes y su desarrollo en Perú 197
Daysi Julissa García-Cuéllar
Jesús Victoria Flores Salazar

Capítulo 3
La Génesis Documental como aporte teórico-metodológico para investigaciones sobre desarrollo profesional docente y tecnología 219
Maria Ivete Basniak
Everton José Goldoni Estevam

Capítulo 4
Movimientos, Pensamientos y GeoGebra:
algunos aspectos neurocientíficos en
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.................................249
Humberto José Bortolossi

Capítulo 5
Ecosistemas Educativos Híbridos en
la investigación en matemática educativa.................................271
Sergio Rubio-Pizzorno
Gisela Montiel Espinosa

Organizadores 313

Autores...314

Índice remissivo...320

APRESENTAÇÃO

No início, o *software* livre GeoGebra foi projetado para trabalhar com elementos de geometria analítica, ou seja, traçar graficamente circunferências, elipses, hipérboles e parábolas para obter, de maneira simultânea, sua expressão analítica, e vice-versa. Dessa primeira etapa de desenvolvimento do software provém seu nome, que se compõe pelas palavras em alemão *Geometrie* e *Algebra*, que coincidem com as palavras em português e em espanhol: *GEO*metria + ál*GEBRA*.

Atualmente o GeoGebra é muito mais que um software para traçar cônicas: graças a sua comunidade global de usuários e desenvolvedores, ele se transformou em um potente e versátil software de *matemática dinâmica*, pois com ele é possível trabalhar diversas áreas da Matemática, como álgebra, cálculo diferencial e integral, estatística descritiva e inferencial, probabilidade, geometria euclidiana, afim, analítica, do espaço, entre outras. O aspecto dinâmico do software tem dado possibilidade de interagir com os objetos matemáticos de maneira dinâmica, ou seja, possibilitando modificá-los de maneira contínua e em tempo real. Ademais, essa modificação afeta todas as representações do objeto matemático, cuja apreensão envolve considerar sua característica de multi representação dinâmica do GeoGebra.

Devido a essas características e a ser um software livre, o GeoGebra tem sido abraçado por uma comunidade global de usuários e desenvolvedores, entre os quais se encontram principalmente professores, estudantes e pesquisadores educacionais que, em conjunto, formam a comunidade educacional aberta do GeoGebra. Esta comunidade se apropriou do software, o qual lhe deu um grande impulso, por exemplo, ao disponibilizar um repositório on-line que conta com mais de um milhão de recursos educacionais abertos elaborados com o GeoGebra, os quais foram projetados praticamente em sua totalidade pelos membros da comunidade. Isso faz supor que tais recursos são construídos com o propósito principal de ser implementados nas instituições educacionais por parte dos professores com seus estudantes.

Além da criação de recursos e sua implementação, os membros da comunidade GeoGebra também têm realizado pesquisas sobre o uso educacional do GeoGebra em diferentes níveis educacionais, com diferentes conteúdos matemáticos, em diferentes países, com diferentes marcos teóricos e metodologias. Centrando-nos na América Latina, destacam-se exemplos que consideram o avanço na pesquisa educacional sobre o uso do GeoGebra, tais como os mais de 100 artigos publicados em revistas latino-americanas que aparecem ao se buscar a palavra GeoGebra no *Sistema de Informação Científica de acesso aberto: Redalyc*; ou o grupo de discussão *Matemática Educacional na Era Digital (Matemática Educativa en la Era Digital)*, cujo coordenador é Sergio Rubio-Pizzorno, que se realiza a cada ano no evento acadêmico *Reunião Latino-americana de Matemática Educacional (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa)*. Nesse grupo discutem-se os aportes do GeoGebra para a região a partir de diferentes perspectivas como, por exemplo, visibilização e articulação da Comunidade GeoGebra Latino-americana, recursos educacionais abertos integrando práticas e tecnologias digitais com o GeoGebra, e projetos de alcance regional realizados pela Comunidade GeoGebra Latino-americana.

Os autores e autoras, na edição de 2018 do grupo de discussão, começaram a reconhecer a importância de refletir sobre as pesquisas que se realizam na América Latina a respeito do uso educacional do GeoGebra, para perceber os aportes realizados a partir da e para a região. Eles são muito importantes, dadas as condições educacionais particulares da América Latina, que a distinguem de outras latitudes do mundo com maiores recursos econômicos e cobertura. Desta maneira e por iniciativa de Maria Ivete Basniak, os autores e autoras do grupo de discussão, em sua edição de 2018, começaram uma colaboração acadêmica que se institucionalizou por meio do Projeto de Pesquisa internacional intitulado *A Construção de animações e simuladores no software Geogebra e o ensino e aprendizagem de Matemática,* aprovado e financiado pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). O Projeto tem como objetivo investigar o potencial da construção de animações e simuladores no software GeoGebra para ensino e aprendizagem de matemática nos sistemas educacionais de diferentes países da América Latina.

Um dos produtos do Projeto é a escrita do presente livro por parte dos membros do grupo de discussão Matemática Educativa na Era Digital edição 2018, centrando-se especificamente em divulgar aportes teóricos para a pesquisa do uso educacional do GeoGebra, realizadas na América Latina. Desta maneira, foi natural que os membros do Projeto de Pesquisa internacional considerassem os diferentes fundamentos teóricos nos quais são embasadas suas pesquisas em Educação Matemática com o GeoGebra. Portanto, o presente livro é resultado da necessidade de considerar os aportes teóricos que estão sendo empregados a partir da América Latina para a pesquisa em Educação Matemática com o GeoGebra, tais como:

1. Apropriação de teorias já existentes que têm sido adaptadas para seu uso nas condições próprias dos países da América Latina;
2. Articulação com perspectivas teóricas de outras disciplinas, como a neurociência e a psicologia; e
3. Proposta original de fundamentos teóricos para a valorização do uso educacional de tecnologias de diferentes naturezas.

No primeiro capítulo, intitulado *Contribuições da Teoria da Objetivação ao estudo da aprendizagem geométrica em contextos de Elaboração de Simuladores com o GeoGebra*, os autores e autoras Juan Luis Prieto G., Rafael Enrique Gutiérrez Araujo, Irene Victoria Sánchez-N., Stephanie Díaz-Urdaneta, Ivonne C. Sánchez-S. e Luis Andrés Castillo B. (todas e todos membros da *Associação Aprender en Red*), discutem o uso dos princípios da *Teoria da Objetivação* para analisar a aprendizagem geométrica produzida em contextos de Elaboração de Simuladores com o GeoGebra, destacando o papel que o referido software desempenha na produção desse tipo de aprendizagem.

No segundo capítulo, intitulado *Aproximação Instrumental: suas origens e seu desenvolvimento no Peru*, suas autoras Daysi Julissa García-Cuéllar e Jesús Victoria Flores Salazar apresentam e discutem alguns elementos da Aproximação Instrumental, centradas na noção de esquemas e técnicas instrumentadas. Além disso, apresentam algumas pesquisas realizadas no Peru, na linha de Tecnologias e Visualização em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Peru, nas quais a Aproximação Instrumental é o marco teórico para as análises e, finalmente, mostram reflexões sobre as perspectivas futuras relacionadas ao desenvolvimento dessa aproximação.

O terceiro capítulo, intitulado *A Gênese Documental como aporte teórico-metodológico para pesquisas sobre desenvolvimento profissional docente e tecnologia*, os autores Maria Ivete Basniak (coordenadora do Projeto de Pesquisa internacional) e Everton José Goldoni Estevam apresentam as bases teóricas da Gênese Documental e discutem como esta teoria pode constituir como aporte teórico-metodológico para as pesquisas sobre conhecimento e prática profissional de professores que ensinam Matemática. Para esclarecer aspectos da Gênese Documental, as discussões são complementadas com excertos de experiências e discussões realizadas no contexto de um grupo de estudos de professores brasileiros, orientado desde 2013 até o presente pela perspectiva da Comunidades de Prática de professores que ensinam matemática como contexto de formação profissional.

O quarto capítulo, intitulado *Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: Alguns Aspectos Neurocientíficos no Ensino e Aprendizagem de Matemática*, Humberto José Bortolossi discute, a partir da perspectiva da Neurociência e da Psicologia, o importante papel que o movimento desempenha no contexto de ensino e aprendizagem através de duas atividades elaboradas no GeoGebra com base nessas teorias, que foram implementadas em uma disciplina da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense, no Brasil. Parte da premissa de que o GeoGebra é conhecido por ser um software de geometria dinâmica, que se refere à capacidade do aplicativo em trazer movimento às construções, diferentemente do que acontece com régua e compassos usuais, é possível gerar uma variedade de exemplos de uma mesma situação geométrica.

No quinto capítulo, que encerra o livro, intitulado *Ecossistemas Educacionais Híbridos na pesquisa em Educação Matemática*, Sergio Rubio-Pizzorno e Gisela Montiel Espinosa discutem uma nova tendência de pesquisa com tecnologias em Educação Matemática que nos leva a perguntar sobre o valor pragmático e epistêmico de todas as tecnologias. Com base em aportes da antropologia, sociologia e pesquisa educacional, considera-se as tecnologias digitais como uma construção social, as quais, de maneira natural, formam parte de nossos ecossistemas educacionais. Atendendo a diferentes naturezas de tais tecnologias, é possível reconhecer que elas ajudam a constituir ecossistemas educacionais híbridos.

A partir desse reconhecimento, propõe-se aproveitar, de um lado, o potencial pragmático e epistêmico de cada tecnologia utilizada com propósito educacional; e de outro, o uso articulado das tecnologias. À luz dessa proposta, o GeoGebra se apresenta como importante expoente, devido à versatilidade do software e às ferramentas de autor, que permitem elaborar recursos educacionais abertos, onde é possível integrar tecnologias de diferentes naturezas.

Em definitivo e à luz dos capítulos que o compõe, este livro se apresenta ao leitor como uma amostra do sério e responsável trabalho acadêmico realizado na América Latina, o qual tem impulsionado o desenvolvimento de diversas correntes teóricas que se apresentam como explicações que tentam ser o mais próximas e sensíveis à realidade dos contextos locais dos países latino-americanos. Assim, este livro também pretende ser um aporte à difusão do software livre GeoGebra na Educação Matemática de nossa região, para aproveitar seu caráter aberto e comunitário.

Desejamos uma boa leitura!

Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

Paraná, Brasil e Cidade do México, México 2020

PREFÁCIO

Prefaciar uma obra é sempre uma honra, uma alegria e um desafio. Este último, sobretudo, por permitir ao prefaciante uma liberdade de escrita e uma viagem por entrelinhas suscitadas com a leitura da obra.

Fruto de um projeto de pesquisa financiado pelo CNPq, este livro reúne estudos realizados na América Latina, impulsionando o desenvolvimento de correntes teóricas que possam se aproximar à realidade de cada país – Brasil, México, Peru e Venezuela – aqui representado. É mais uma obra para a difusão do GeoGebra na Educação Matemática.

Para quem se debruça na pesquisa acadêmica, algumas perguntas são recorrentes, dentre elas: Que tecnologia utilizar? Com que teoria? Qual abordagem metodológica? Possivelmente, a maior dificuldade em respondê-las esteja no fato de que não é possível contestá-las isoladamente. Talvez um positivista o faça com facilidade. Não penso que um educador matemático brasileiro tenha respostas específicas e singelas para cada um destes questionamentos. Nossa comunidade científica, pela própria constituição e natureza da nossa área, superou bastante esses reducionismos[1]. A Educação Matemática é uma área que produz conhecimento dialogando com as Ciências Exatas e com as Humanidades.

A tecnologia é uma criação humana, social. Os humanos são seres políticos, e TODOS possuem ideologias. Assumir não ter ideologia já é uma. Nossas visões de mundo são constituídas nos

1 A título de exemplo, no *e-Book* intitulado *Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática* (Coleção SBEM, volume 13, 2018) você, sócio(a) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, verá a riqueza de possibilidades.

diferentes contextos sociais dos quais participamos. Portanto, este livro constitui mais uma obra que permite ao (futuro) pesquisador em educação matemática refletir sobre questões inerentes à integração de tecnologias digitais em sua prática de pesquisa e/ou de ensino.

Pesquisar é uma ação humana, social, política, criadora, dinâmica, simbólica. É uma ação que leva em consideração o contexto no qual os significados sociais são constituídos pelos seus protagonistas. Pesquisa não se efetiva apenas mediante uma lista de procedimentos e de recursos a serem aplicados. E, em uma investigação, as interações não ocorrem com os sujeitos agindo como iguais.

Pesquisa, tecnologia e inovação caminham conjuntamente e são imprescindíveis no desenvolvimento de uma nação. Todavia, nem toda inovação é oriunda de uma investigação científica. Uma pesquisa não é planejada para produzir resultados já esperados pelo pesquisador. Tampouco é uma ação voltada para circunstâncias pontuais, específicas, como tende a ocorrer em uma inovação. São as surpresas, as contraintuições que devem despertar o olhar e o caminhar de investigadores. Essas inquietações são legitimadas mediante problemática e revisão de literatura devidamente adensadas. Revisão de literatura que também precisa ser continuamente revisitada e atualizada.

Não é a mesma coisa afirmar que um *software* é uma ferramenta ou que é um ambiente. Não se trata de apenas uma questão de troca de palavras. Há uma semântica muito mais rica e instigante que deve ser teorizada. É, no ambiente acadêmico e na prática de pesquisa científica, o locus propício para essa problematização.

O GeoGebra transformou-se em mais que um *software*. Seu desenvolvimento e aprimoramento vão se efetivando graças a sua comunidade global de usuários e desenvolvedores. Com esse caráter aberto, gratuito e comunitário, vemos o enriquecimento da relação entre diversas áreas matemáticas, como Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, Geometria, entre outras.

Ao prefaciar uma obra que permite essas reflexões no âmbito da pesquisa em Educação Matemática com tecnologias digitais, reitero o convite para inovarmos nos meios de produção de dados. O momento atual da pandemia, apesar de muito difícil, nos tem habituado, ainda que forçadamente, a constituir formas diferentes de encontros e comunicações científicas. Que elas não sejam apenas aproveitadas pelos mercenários da Educação! Que nós, educadores matemáticos, sigamos defendendo o processo educacional de qualidade para todas e para todos, sobretudo nas Instituições públicas de ensino e de pesquisa, e com qualquer tecnologia.

Que você aprecie a leitura a partir do que brasileiros, chilenos, peruanos e venezuelanos nos escrevem. *¡Hasta la vista!*

Marcelo Almeida Bairral

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

1

Juan Luis Prieto G.
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo
Irene Victoria Sánchez-N.
Stephanie Díaz-Urdaneta
Ivonne C. Sánchez-S.
Luis Andrés Castillo B.

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO AO ESTUDO DA APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA EM CONTEXTOS DE ELABORAÇÃO DE SIMULADORES COM O GEOGEBRA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.23-44

INTRODUÇÃO

Neste capítulo descrevemos como a Associação *Aprender en Red* tem utilizado princípios fornecidos pela Teoria da Objetivação - TO (RADFORD, 2020) para analisar a aprendizagem geométrica produzida em contextos de Elaboração de Simuladores com o GeoGebra - ESG, destacando o papel do software na produção desse tipo de aprendizagem. Para tal, primeiramente discutimos como nos aproximamos da TO e, em consequência, a tomamos como marco teórico idôneo para nossos propósitos e interesses de pesquisa.

Com respeito a isso, em 2013 iniciamos, na Venezuela, um projeto socioeducacional denominado Projeto Clube GeoGebra[2], orientado a alunos de Educação Média[3] do Estado de Zulia (oeste do país). Os *Clubes GeoGebra* concebem-se como espaços não convencionais de ensino e aprendizagem da Matemática e da Física, em que alunos e professores (tanto em serviço quanto em formação inicial) dedicam-se a elaborar, com o *software* GeoGebra, simuladores computacionais representando diferentes fenômenos naturais ou artificiais de determinados aspectos da realidade (PRIETO; GUTIÉRREZ, 2015; 2016; 2017). À medida que o projeto avançava, fomos reconhecendo a ESG como um conjunto de atividades educacionais não convencionais, com potencial para conduzir processos de ensino-aprendizagem de geometria entre professores e alunos participantes.

Este reconhecimento consolidou-se no desenvolvimento de uma agenda de pesquisa em torno da ESG (PRIETO; DÍAZ-URDANETA, 2019), orientada por perguntas que abrangem distintos aspectos dessa atividade: i) Em que medida a matemática escolar intervém

2 Para maior informação do projeto, ver: http://www.aprenderenred.com.ve/clubgeogebra.

3 Nível de ensino escolar equivalente aos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio do Brasil.

na ESG? ii) Como é a atividade matemática que acontece na ESG? iii) O que e como se aprende matemática durante a ESG? iv) Quais outros conhecimentos são manifestados na ESG? v) Que saberes são mobilizados pelos professores que participam no projeto ao conduzirem as experiências de ESG dos seus alunos?

De todas essas perguntas que nos têm ocupado, na atualidade encontramo-nos realizando estudos focados nos processos de *aprendizagem da matemática* (particularmente em geometria) dos alunos que participam na ESG e no papel do professor nesses processos. Porém, apesar de termos realizado anteriormente alguns trabalhos relacionados à aprendizagem em situação de ESG (DÍAZ-URDANETA; PRIETO, 2016; SÁNCHEZ-S.; PRIETO, 2017), todo nosso esforço investigativo começou a fazer sentido a partir do momento em que assumimos o processo da aprendizagem (o qual também é um processo de ensino) como o principal fenômeno de estudo, capaz de orientar nossa compreensão em relação ao potencial da ESG para a aprendizagem da geometria escolar.

Salientamos que essa atitude, em relação ao foco da pesquisa, foi inspirada na aproximação que tivemos com uma perspectiva histórico-cultural da aprendizagem em matemática, que resenhamos na próxima seção.

UMA PERSPECTIVA TEÓRICA PARA INTERPRETAR A APRENDIZAGEM DE SABERES GEOMÉTRICOS

No ano 2017 fomos convidados para participar de um seminário de pesquisa cuja temática era a introdução à TO, teoria que atualmente utilizamos como referencial em nossa pesquisa.

Esta teoria, inspirada nos trabalhos do filósofo alemão G. W. F. Hegel e seu posterior desenvolvimento por K. Marx e outros filósofos da tradição dialética, como L. Vigotski e E. Ilienkov, propõe um modo de entender a aprendizagem humana como um processo coletivo, cultural e historicamente situado que destaca o papel do trabalho social humano, o corpo, as emoções e o mundo material (RADFORD, 2018b). Essa maneira de entender a aprendizagem inscreve-se dentro de uma compreensão da Educação Matemática como um esforço

> [...] político, social, histórico e cultural orientado à criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas constituídas historicamente e culturalmente, e que contemplam e imaginam novas possibilidades de ação e pensamento (RADFORD, 2018a, p. 73, tradução nossa).

A ideia de *criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos,* mencionada na citação anterior, revela um dos aspectos característicos da TO: a aprendizagem não se trata só de *conhecer*, mas de *se tornar alguém*. Em outras palavras, para a TO, não é possível que aconteça aprendizagem se quem aprende, além de conhecer, não se *transformar* (RADFORD, 2017b). No entanto, uma das características fundamentais que definem essa teoria e que a diferencia de outras perspectivas teóricas é a relação que a TO estabelece entre o professor e o aluno, uma relação ética marcada pelo *trabalho conjunto* que eles desenvolvem. Para a TO, no trabalho conjunto,

> [...] os estudantes não são reduzidos a um papel de simples sujeitos cognitivos. Eles não aparecem como sujeitos passivos recebendo saber ou como sujeitos autônomos que constroem seu próprio saber. Na mesma linha, os professores não são reduzidos a um papel de agentes tecnológicos e burocráticos – guardiões e executores do currículo. Eles não aparecem como possuidores de saber que entregam ou transmitem saber para os estudantes diretamente ou através de estratégias facilitadoras (RADFORD, 2017a, p. 252).

Assim, no trabalho conjunto da aula, a aprendizagem e o ensino consideram-se

> [...] não como duas atividades separadas, mas como uma única e mesma atividade: aquela na qual professores e estudantes, embora sem fazer as mesmas coisas, empenham-se em conjunto, intelectualmente e emocionalmente, para a produção do que chamamos um trabalho comum (RADFORD, 2017a, p. 252).

Como se pode perceber, na TO são de importância vital os *processos* progressivos, encarnados, simbólicos, materiais, discursivos, subversivos e afetivos de criação de novos indivíduos, capazes de pensar criticamente e posicionar-se eticamente diante das questões urgentes de suas comunidades e do seu mundo (RADFORD, 2017a). Esses processos surgem no trabalho conjunto, em cujo desenvolvimento os indivíduos constituem-se ao se encontrarem com o outro e com o mundo nas dimensões conceitual, material e cultural (RADFORD, 2014). Com respeito a isso, na TO,

> [...] os encontros dos alunos com o saber matemático historicamente constituído, materializado no trabalho comum dos professores e dos estudantes, são denominados *processos de objetivação*. [...] Por meio destes processos sociais, materiais, encarnados e semióticos, os estudantes e professores não só criam e recriam saber, mas eles também se coproduzem como sujeitos em geral e como sujeitos da educação, em particular. Mais precisamente, eles produzem subjetividades; isto é, indivíduos singulares em formação. É por isso que, a partir dessa perspectiva, os processos de objetivação são ao mesmo tempo os *processos de subjetivação* (RADFORD, 2017a, p. 252, grifos dos autores).

Por razões de espaço, neste texto somente faremos referência aos processos de objetivação que caracterizam a aprendizagem segundo a TO, discutindo como a temos utilizado em nossos estudos sobre a aprendizagem geométrica em contextos de ESG. Em geral, os processos de objetivação são

> [...] aqueles processos sociais, coletivos de *tomada de consciência*: tomada de consciência progressiva e crítica, de um sistema de pensamento e ação cultural, e historicamente constituído, sistema que gradualmente notamos, e que ao mesmo tempo dotamos de sentido. Os processos de objetivação são aqueles processos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela à consciência não passivamente, mas por meio da atividade corpórea, sensível, afetiva, emocional, artefactual e semiótica (RADFORD, 2020, p. 20, tradução nossa, grifo original).

Sobre esta definição, fazemos dois apontamentos. Por um lado, o sistema de pensamento e ação codificado culturalmente é o *saber* (matemático, científico, artístico, pedagógico, etc.) em si mesmo, que pode se revelar à consciência dos indivíduos mediante seu trabalho conjunto. Por outro lado, durante essa atividade, os professores e alunos recorrem a *signos* (palavras, gestos, inscrições de todo tipo, etc.) e *artefatos* (calculadora, computador, software de aplicação, etc.) portadores de determinadas *conceitualidades* que afetam os significados produzidos na aula, "ao sugerir formas definidas de ação e reflexão, e linhas potenciais de desenvolvimento cognitivo e social" (RADFORD, 2014, p. 414, tradução nossa). Em outras palavras, mediante o trabalho conjunto, os signos e artefatos culturais podem revelar o conteúdo conceitual que a atividade humana tem depositado neles. Radford (2003) refere-se a esses signos e artefatos como *meios semióticos de objetivação.*

Tendo em vista o objetivo deste texto, na seção a seguir aprofundamos o papel desses meios semióticos, devido à importância que possuem no desenrolar da atividade matemática na sala de aula. Especialmente, fazemos destaque ao *software* GeoGebra enquanto *artefato* principal das atividades de ESG.

O *SOFTWARE* GEOGEBRA ENQUANTO ARTEFATO CULTURAL

Em linhas gerais, Martos e Martos (2014) definem o artefato como qualquer objeto que é produto do gênio humano, sem características pré-estabelecidas, produzido para satisfazer as necessidades de determinada cultura humana. No âmbito educacional e como parte do seu trabalho profissional, os professores utilizam uma diversidade de artefatos na atividade da sala de aula, dentre os quais podemos mencionar aqueles que têm sido predominantes historicamente, como o papel, lápis, livros, louças, entre outros. A função que possuem os artefatos na atividade da aula orienta-se à mediação da relação professor-aluno ou da relação aluno-saber (RADFORD, 2020). Particularmente, na mediação da relação aluno-saber, subjaz uma visão do ensino-aprendizagem que determina a forma como os indivíduos utilizam os artefatos na atividade que acontece nesses contextos (RICKENMANN, 2006).

No que diz respeito à atividade de ensino-aprendizagem da matemática, destaca-se uma visão histórico-cultural da aprendizagem que concebe os artefatos como partes constitutivas e intrínsecas do pensamento, e não como simples ajudas (RADFORD, 2006). Desse modo, a forma como os alunos fazem dos saberes matemáticos objetos da sua consciência está intimamente vinculada aos artefatos utilizados, de onde surge a ideia de que essas ferramentas modificam e transformam a forma como se aprende (BORBA; VILLARREAL, 2005; HOYLES, 2018; VILLARREAL, 2012).

Um tipo de artefato que tem sido utilizado há mais de três décadas, no campo da Educação Matemática, são os Artefatos Digitais - AD, os quais se caracterizam pela sua produção artificial e intelectual, assim como a possibilidade de interação com o usuário. Um AD que desde sua origem foi pensado para o ensino-aprendizagem da matemática é o GeoGebra (HOHENWARTER, 2017), um software de matemática dinâmica que tem sido amplamente incorporado tanto nas atividades matemáticas da sala de aula quanto em atividades de pesquisa, talvez pelo valor pragmático que possui (ARTIGUE, 2002). Com respeito a esse *software*, o estudo de Sánchez-S. e Prieto (2019) mostra que o GeoGebra possui uma variedade de ferramentas (de construção e medida) e funcionalidades, que são portadoras de conceitualidades que revelam os saberes matemáticos e geométricos que têm sido constituídos pela humanidade ao longo da história. Assim, podemos afirmar que o GeoGebra é um artefato cultural com uma inteligência histórica nele incorporada (RADFORD, 2006).

Por exemplo, pensemos em desenhar um retângulo na aplicação *Geometria* do *software* GeoGebra. A ferramenta *Polígono* sugere ao usuário uma forma de construção dessa figura para a qual se deve informar ao *software* quais são os vértices que lhe definem (Figura 1). Desta maneira, a ferramenta *Polígono* é portadora de uma conceitualidade particular que é possível materializar na construção do retângulo. Além disso, como sugere a Figura 1, cada ferramenta e funcionalidade do GeoGebra possui determinadas demandas na forma de condições que o usuário deve proporcionar ao *software*, condições que, salientamos, não são neutras nem ingênuas, mas são parte fundamental do saber matemático depositado nessas ferramentas (SANDOVAL; MORENO-ARMELLA, 2012).

Figura 1 - Conceitualização do polígono pela ferramenta correspondente

Fonte: Elaborada pelos autores.

Conforme exposto anteriormente, assumimos que o uso deliberado das ferramentas e funcionalidades do GeoGebra pode afetar o significado dos conteúdos conceituais que portam estes recursos no desenvolvimento do trabalho conjunto em sala de aula. Assim, dada a importância que a TO concede ao trabalho com artefatos, pode-se concluir que a cultura material intervém nos processos de objetivação e ajuda que eles possam materializar. Entretanto, devido a que os artefatos (como o *software* GeoGebra) não podem revelar por si mesmos a conceitualidade que o trabalho humano tem depositado neles, é necessário que a cultura intelectual e material seja integrada ao trabalho conjunto que professores e alunos desenvolvem em sala de aula, com o intuito de fazer aparente os saberes que portam os artefatos utilizados.

UM EXEMPLO DE PROCESSOS DE OBJETIVAÇÃO NA ESG

Para ilustrar o modo como a conceitualidade que portam algumas ferramentas de construção do GeoGebra pode se revelar à consciência, discutimos brevemente o episódio[4] de um professor (João) e dois alunos (Simão e Edmilson) que, no contexto de uma experiência de ESG, buscam compreender a técnica de construção de um círculo com o GeoGebra (Tabela 1) produzida por esses alunos anteriormente. Nesse contexto revelam-se processos de objetivação produzidos durante o trabalho prático de comunicação, que giram em torno de uma maneira geométrica de entender a rotação (a conceitualidade)

4 Por episódio referimo-nos a um fragmento da atividade em que se revela um processo de objetivação. O episódio apresentado neste trabalho está composto por uma sequência de linhas indicadas por números, e que contêm as falas dos participantes na atividade e imagens que complementam os signos evocados por eles. As linhas do episódio reportado vão da 40 a 58.

que se encontra incrustrada na ferramenta do GeoGebra *Rotação em Torno de um Ponto*.

Tabela 1 - Técnica de construção do círculo aplicada pelos alunos

Passos	*Ações*
1. Determinar o centro do círculo	*1. Traçou-se uma reta a paralela ao eixo x pelo ponto C;* *2. Rotacionou-se a reta a com centro em C, em um ângulo de 42.6° e em sentido anti-horário, obtendo a reta a';* *3. Criou-se o controle deslizante α, com valores mínimo e máximo de 0° e 65°, respectivamente;* *4. Rotacionou-se a reta a' com centro em C, em um ângulo α e em sentido horário, obtendo a reta a'';* *5. Traçou-se uma circunferência centrada em C e raio de 21*k, obtendo a circunferência b;* *6. Interceptou-se a reta a'' e a circunferência b, obtendo o ponto D, centro do círculo.*
2. Definir o raio do círculo	*1. Tomou-se a medida k como o raio do círculo.*
3. Traçar a circunferência do círculo	*1. Traçou-se a circunferência do círculo, centrada em D e raio igual a k, obtendo a curva d.*
4. Ilustrar o círculo	*1. Modificou-se a transparência da circunferência do círculo para ilustrar a região interna.*

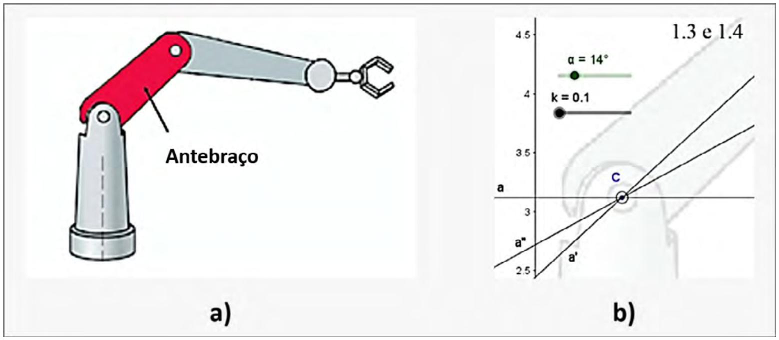
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para usar a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto,* é necessário comunicar ao *software* os três elementos (condições) característicos dessa transformação geométrica: o *objeto*, o *centro* e o ângulo de rotação. No que diz respeito ao ângulo de rotação, seu valor insere-se por meio de um campo de entrada que aparece após serem selecionados os outros elementos. O valor do ângulo pode se expressar como medida (um número) ou como variável (uma letra), segundo seja definida sua construção. Para qualquer opção, as formas de expressar o valor do ângulo de rotação levam a maneiras diferentes de entender essa transformação no *software* GeoGebra.

No caso que descrevemos aqui, determinados processos de objetivação tiveram lugar quando João, Simão e Edmilson discutiram as ações da técnica de construção do círculo que envolveram o uso da ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* (ações 1.2 e 1.4, Tabela 1), revelando progressivamente a conceitualidade do artefato. Especificamente, *descrevemos a forma como esses sujeitos tomaram consciência da ideia de rotação com um ângulo expressado como variável*.

Existem duas formas em que uma variável pode representar o ângulo de rotação com o GeoGebra. A primeira delas ocorre quando a variável expressa o valor de um ângulo construído previamente na interface do *software*. A segunda, quando a variável expressa um intervalo de medidas angulares representado por um controle deslizante. Identificamos essa segunda forma de representação em nosso episódio, no momento em que os alunos, motivados pela necessidade de representar o movimento do antebraço do braço robótico ilustrado na Figura 2a, desenvolveram as ações 1.2 e 1.4. da técnica (Figura 2b).

Figura 2 - Antebraço do braço robótico e rotação da reta *a'*



Fonte: Elaborada pelos autores.

Devido à técnica de construção ter sido aplicada muito antes da reunião entre João, Simão e Edmilson, os alunos esqueceram que haviam aplicado a rotação (ação 1.4, Quadro 1). Ao comunicarem a João[5] como representaram o antebraço do braço robótico no GeoGebra, vincularam erradamente o controle deslizante α (ação 1.3) à rotação da reta *a* (ação 1.2) e não à reta *a*', como realmente foi realizado. A fim de elucidar esta questão, discutimos a seguir, mediante a análise de excertos das falas dos participantes (selecionadas das transcrições dos registros em vídeo da reunião), como Simão e Edmilson tomaram consciência tanto da existência da rotação da ação 1.4, quanto da conceitualização desse objeto geométrico presente na ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*, com um ângulo expresso como variável vinculada a um controle deslizante.

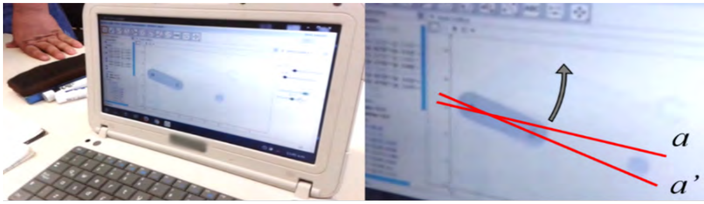
O RECONHECIMENTO DA AÇÃO 1.4 DA TÉCNICA

A ação 1.4 da técnica começou a ser reconhecida quando João tomou consciência da existência no desenho dinâmico[6] da reta *a*'', ignorada por ele até esse momento, com comportamento distinto à reta *a*' (ação 1.2), apontada por Edmilson e Simão. Primeiramente os alunos haviam afirmado que a reta *a*' foi rotacionada em sentido anti-horário, com um ângulo de rotação definido pelo controle deslizante α. Isto revelou uma contradição quando compararam com o desenho dinâmico, porque para certos valores do controle deslizante, a reta *a*' apresentava coeficiente angular negativo (Figura 3); entretanto, o ângulo de rotação α variava entre 0º (posição horizontal) e 65º, em sentido anti-horário.

5 No momento da reunião, João realizava uma visita ao Clube GeoGebra em que Simão e Edmilson participavam. O propósito da visita de João, enquanto diretor do projeto, era conhecer e monitorar o trabalho que até o momento estavam realizando os alunos do clube.

6 Para efeitos da pesquisa, o desenho dinâmico é a representação obtida na interface do GeoGebra que modela as formas e movimentos do antebraço do braço robótico.

Figura 3 - Coeficiente angular negativo da reta *a'* para certos valores de α



(a) (b)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os alunos apresentaram dificuldades para reconhecer essa contradição somente observando o desenho dinâmico. Então, João produziu outra representação das ações descritas por Simão e Edmilson, em que integrou o desenho em papel ao repertório de recursos semióticos utilizados. Para isto, o professor desenvolveu um discurso oral em que usou o lápis para indicar, sobre o desenho no papel, cada um dos elementos necessários para a aplicação da rotação no caso da ação 1.2, até chegar no momento de interpretar o ângulo de rotação no *software* GeoGebra (excertos 40 e 41). Sua intenção foi que os alunos interpretassem os efeitos que deveriam se produzir ao definir a ação 1.2, em função de um ângulo de rotação expressado como variável (α), e não como medida, sobre o desenho dinâmico. A partir da interpretação realizada sobre o desenho no papel, João chamou a atenção dos alunos para observarem o desenho dinâmico e compararem o comportamento da reta *a*', comparando a interpretação expressa por Edmilson no seu discurso com o comportamento observado no computador (excerto 42).

40. João: *Logo, vocês me dizem que desenharam essa reta aqui [indica com o lápis a reta a' (Figura 4)]. Por que essa reta é importante? Imagino que é importante porque aí vai estar o outro ponto... a outra circunferência que vocês irão desenhar, ou o outro círculo, acho. Tá bom, mas, como desenhei essa reta? Vocês me disseram "rotacionando essa" [refere-se à reta a]. Bom, se a rotaciono, eu entendo vocês. Mas se vocês a rotam devem me dizer [...].*

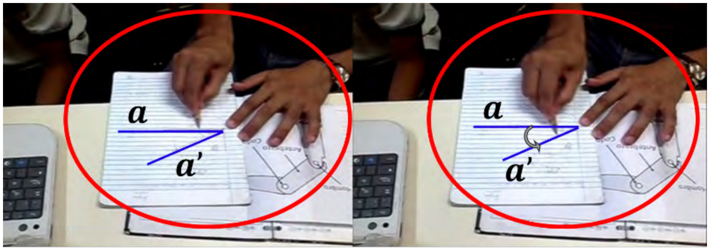
Figura 4 - João indica os elementos necessários para aplicar a rotação no GeoGebra

(a) (b)

Fonte: Elaborada pelos autores.

41. João: *Isto é o que eu quero que entendam. Qual o ângulo aqui? [referindo-se ao desenho em papel]. Vocês me disseram: "Não professor, o ângulo não é fixo. O ângulo é um controle deslizante. Usamos um controle deslizante porque, se o manipulamos, vamos conseguir ver que a reta descenda e ascenda, descenda e ascenda, e isso nos convêm". Eu entendo vocês. Mas se eu vou rotacionar isto [indica com o lápis a reta a sobre o desenho (Figura 5a), deslocando a mão de esquerda à direita] [...] nesse sentido, no sentido anti-horário, um ângulo α, essa reta [a] se mexe daqui e vai chegar até aqui [indica a rotação da reta a no papel, usando a ponta do lápis (Figura 5b)]. Ela não vai baixar [colocar-se por debaixo do eixo x]. Mas eu, aí [referindo-se à Janela de Visualização do GeoGebra], estou vendo que [a reta] baixa.*

Figura 5 - João explica aos alunos a contradição do que foi expressada por eles

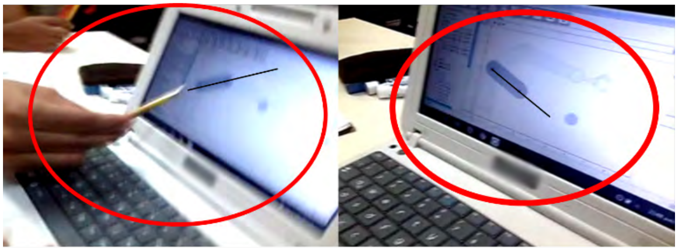


(a) (b)

Fonte: Elaborada pelos autores.

42. João: *Aqui [na tela do computador] [...], eu imagino que a reta está aqui [indicando com o lápis o desenho dinâmico na Janela de Visualização do GeoGebra (Figura 6a)]. Olhem, aí [a reta] chega a ser horizontal, mas depois baixa (Figura 6b). O que aconteceu aí? Como era a questão [a construção]? Porque eu não a entendi. Não se lembra, Simão, do que você fez?*

Figura 6 - Uso do desenho dinâmico para ilustrar a contradição discutida



(a) (b)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Esse uso coordenado de palavras, gestos e inscrições, tanto no papel quanto no *software*, oportunizou reconhecer a existência de *a*'' como uma segunda reta presente na construção (e que também foi rotacionada, além de *a*'), no momento em que Edmilson, por vontade própria, decidiu utilizar a ferramenta *Exibir/Esconder Objeto* para deixar visíveis todos os objetos construídos até o momento (excerto 43). Essa decisão de mostrar todos os elementos da construção revela que o aluno começou a duvidar do seu discurso (excerto 44), possibilitando João intervir (excerto 47). Vale ressaltar que, quando Edmilson fez uso da ferramenta mencionada, o controle deslizante tinha valor de 0^{o}; logo, as retas *a*' e *a*'' encontravam-se sobrepostas e não era possível distingui-las.

Por esse motivo, João solicitou que Simão mudasse o valor do controle deslizante para visualizar melhor ambas as retas, uma vez que todos os objetos construídos estavam visíveis na tela do computador (excerto 47). Essa estratégia foi potencializada pelo professor, ao sugerir o uso da opção *Animar* do GeoGebra sob o controle deslizante α

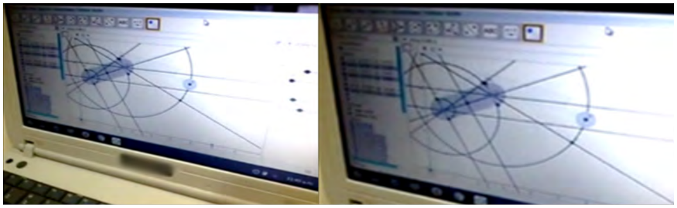
(excertos 48, 49 e 50). Ativar essa opção possibilitou que aos alunos não só confirmassem a existência da reta *a*'' no desenho dinâmico (como destacou Simão no excerto 51), também que reconhecessem que foi essa reta que foi rotacionada, com ângulo expresso como variável, e não a reta *a*', tal como João enfatizou e como Edmilson reafirmou (excertos 52, 54 e 55), o que evidencia a tomada de consciência da ação 1.4 da técnica.

43. Simão: *Localizamos um... [fica pensativo enquanto Edmilson utiliza a ferramenta Exibir/Esconder Objetos].*

44. Edmilson: *Ao ver essa reta [refere-se à reta que serve de referência à rotação], de quem é linha [homóloga]?*

47. João: *[Simão] Mexe o controle deslizante do ângulo, por favor. Quero ver o que acontece com esse controle deslizante... Aí [nessa posição] está bem. Viu? Isso é o que está acontecendo, eu estava imaginando isso. O que estou vendo aí, agora [nesse instante], não enxergava quando α estava em zero. O que estou vendo de especial? [fazendo a pergunta aos alunos]. Já entendi o que este rapaz [Simão] fez, só ao olhar isso [referindo-se ao desenho dinâmico na Janela de Visualização (Figura 7)].*

Figura 7 - Confirmação da existência da reta *a*'' e a origem da sua rotação



(a) (b)

48. João: *[Simão] Ativa animação a isso [refere-se ao controle deslizante α]. Ao controle deslizante.*

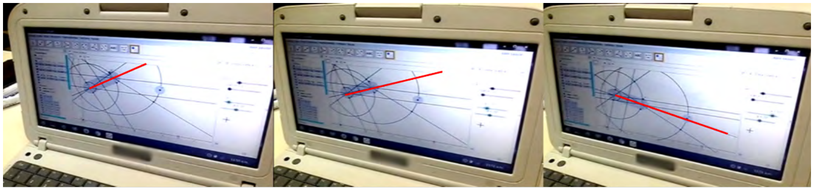
49. Simão: *Aqui?*

50. João: *Isso. Animação. Olhem... Olhem.*

51. Simão: *É como outra reta. Como se houvesse outra reta ali [refere-se à reta a'', a qual se mexe à medida que o controle deslizante α toma valores distintos (Figura 8)].*

Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 8 - Comportamento da reta *a*'' na tela do computador



(a) (b) (c)

Fonte: Elaborada pelos autores.

52. João: *Exato, olha como se mexe essa reta nova [refere-se a a''] ... Porque, realmente, o controle deslizante não está vinculado com essa reta que vocês desenharam aqui [referindo-se à reta a'], mas com a outra [refere-se a a''].*

54. Edmilson: *Edmilson: Ao que parece, essa reta [referindo-se a a'] se desenhou com um ângulo fixo [refere-se ao ângulo de 42,6º], e depois… [nesse momento, o aluno foi interrompido por João].*

55. João: *E a partir dessa [referindo-se à reta a'], vocês desenharam a outra reta [a reta a''].*

Nesse momento, além de reconhecerem a existência da reta *a*'' na construção, os alunos tomaram consciência do ângulo de rotação que Simão utilizou para executar a ação 1.2. Em outras palavras, o excerto 54 revela que os alunos reconhecem que a reta *a*' foi rotacionada com um ângulo fixo de 42,6º.

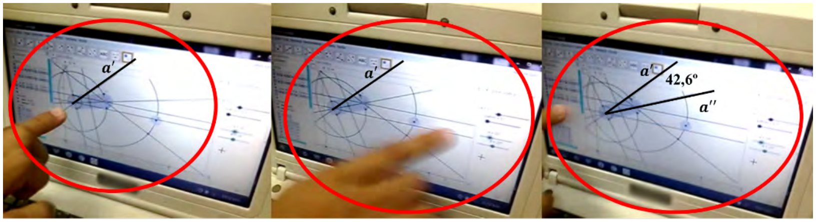
O RECONHECIMENTO DA CONCEITUALIDADE DA ROTAÇÃO APLICADA À RETA A''

Após reconhecerem a existência da reta *a*'' no desenho dinâmico, aquela que foi obtida com um ângulo de rotação expresso como variável (α), desenvolveu-se um processo de significação da rotação aplicada a essa reta, segundo a conceitualidade da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*. Nesse processo, unicamente João interveio para finalizar a reunião de trabalho com os alunos. Neste sentido, João procedeu de forma semelhante às intervenções anteriores, buscando interpretar o que implicou a ação 1.4 da técnica. Na sua interpretação, João produziu um discurso que, por meio da combinação de palavras, gestos e desenhos, referiu-se tanto ao objeto a rotacionar quanto ao ângulo de rotação.

No que diz respeito ao objeto a rotacionar, enfatiza-se que este elemento corresponde a *a*', e não à reta *a* (excerto 57). Quanto ao ângulo de rotação, João interpretou o intervalo de valores que definem a α, com ênfase ao valor máximo do controle deslizante. Após concluir que esse valor é o dobro do ângulo usado na ação 1.2 da técnica, o professor justificou essa afirmação retornando ao desenho no papel. Naquele momento, ele tentou mostrar o conjunto de posições possíveis da reta *a*'', de uma posição inicial (a ocupada por *a*' no desenho) até uma posição final (a ocupada pela reta que é simétrica à *a*'', referente ao eixo de simetria *a*), de acordo com o observado na tela do computador (excerto 58).

57. João: *E depois que ele [Simão] criou essa reta [referindo-se à a' (Figura 9a)], a rotaciona. Mas não rotaciona a [reta] horizontal, rotaciona essa [indica a reta a' (Figura 9b)]. E a rotaciona por um ângulo α que, eu imagino, terá uma medida máxima igual ao dobro do ângulo que tinha no começo [refere-se ao ângulo de 42,6º (Figura 9c)].*

Figura 9 - Interpretação da ação 1.4 na tela do computador



(a) (b) (c)

Fonte: Elaborada pelos autores.

58. João: *Por que o dobro? Porque se essa mede 41º [indicando com o lápis o ângulo de 42,6º sobre o papel] e por aqui, abaixo [refere-se ao espaço por debaixo da reta a], há 41º a mais, [o ângulo α] chegará até 82º. Imagino que você o fez assim [comentando com Simão].*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto apresentamos como temos utilizado alguns princípios teóricos da TO para analisar a aprendizagem geométrica produzida em contextos de ESG. Especificamente, descrevemos a forma como dois alunos da Educação Média da Venezuela tomaram consciência da ideia de rotação (conceitualidade da qual é portadora a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* do GeoGebra) enquanto comunicavam a técnica de construção de um círculo. Para tal, colocamos a atenção no trabalho conjunto desenvolvido por esses alunos e pelo seu professor, no qual uma variedade de meios semióticos (signos e artefatos) marcaram os processos de objetivação reportados.

Na descrição do episódio, o *software* GeoGebra constituiu parte consubstancial do trabalho conjunto dos alunos e o professor e, consequentemente, teve papel fundamental na aprendizagem geométrica reportada. Isto pôde ser observado na maneira como a conceitualidade incrustrada na ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto* afetou os significados dos alunos em relação à transformação abordada, na medida em que tal conceitualidade trouxe à tona linhas potenciais de reflexão e ação sobre a rotação enquanto objeto geométrico (RADFORD, 2014).

Para finalizar, destacamos também o fato de o *software* ter sido utilizado com diferentes propósitos ao longo do episódio reportado. Um dos propósitos de uso foi ampliar o *domínio de funcionamento do desenho geométrico* (na forma de um desenho dinâmico).

Efetivamente, tratando-se de um trabalho de construção realizado em um *software* de matemática dinâmica como o GeoGebra, o desenho em papel tornou-se insuficiente para legitimar algumas ações da técnica aplicada. Assim, como resultado dessa ampliação, foi possível que os alunos visualizassem os efeitos de ter vinculado o controle deslizante à rotação aplicada na ação 1.2 da técnica.

Outro propósito de uso do *software*, vinculado ao anterior, está relacionado às possibilidades de visualização que o GeoGebra oferece. Assim, graças à manipulação do desenho dinâmico, foi possível visualizar as diferenças entre os comportamentos das retas *a*' e *a*'', enquanto a opção *Animar* do *software* estava ativada.

Este tipo de pesquisa nos tem permitido tomar consciência sobre como acontecem os processos de objetivação em atividades próprias de elaboração de simuladores com o software GeoGebra. Entretanto, consideramos que ainda é necessário contar com mais pesquisas voltadas a analisar os processos de subjetivação que alunos e professores desenvolvem enquanto se engajam, intelectualmente, emocionalmente e eticamente, na produção de desenhos dinâmicos com o *software* GeoGebra e na comunicação das técnicas de construção que são produzidas e utilizadas para tal fim.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer, 2005. v. 39.

DÍAZ-URDANETA, S.; PRIETO, J. L. Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. In: SERRES, Y.; MARTÍNEZ, A.; INOJOSA, M.; GÓMEZ, N. (Orgs.). *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática.* Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT, 2016, p. 445-453.

HOHEMWATER, M. The journey of GeoGebra from desktop computers to smartphone. Madrid: *S. Madrileña Emma Castelnuovo*, 2017. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=aKxvlahlKW8. Acesso em: 24 out. 2019.

HOYLES, C. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education,* v. 20, n. 3, p. 209-228, 2018.

MARTOS, E.; MARTOS, A. E. Artefactos culturales y alfabetización en la era digital: discusiones conceptuales y praxis educativa. *Teoría de la educación. Revista Interuniversitaria,* v. 26, n. 1, p. 119-135, 2014.

PRIETO, J. L.; DÍAZ-URDANETA, S. Un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* v. 32, n. 1, p. 685-691, 2019.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* Maracaibo: Aprender en Red, 2015.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* 2. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2016.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* 3. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2017.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* v. 9, n. especial, p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics,* v. 85, p. 405-422, 2014.

RADFORD, L. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (Orgs.). *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural.* Campinas, SP: Mercado de letras, 2017a, p. 229-261.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Orgs.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b, p. 139-165.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 12, n. 2, 61-80, 2018a.

RADFORD, L. Conferencia Dr. Luis Radford. 2018b (37m38s). Santiago: *Aprender en Red.* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Age-EmXa_LI. Acesso em: 06 dez. 2018b.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: TAKECO-GOBARA, S.; RADFORD, L. (Orgs.). *Teoria da Objetivação:* Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2020, p. 15-42.

RICKENMANN, R. El rol de los artefactos culturales en la estructuración y gestión de secuencias de enseñanza-aprendizaje. In Conférence invitée, *Actes du 1er simposio internacional de educación y formación docente,* Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia, 2006, p. 1-21.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. El uso experimental del GeoGebra en un contexto de formación docente en matemática. In: ROSAS, A. M. (Org.). *Avances en Matemática Educativa:* Tecnología para la educación, 4 ed. Ciudad de México: Lectorum, 2017, p. 38-51.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra*. PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 14, n. 1, p. 55-83, 2019.

SANDOVAL, I.; MORENO-ARMELLA, L. Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos,* v. 14, n. 1, p. 21-29, 2012.

VILLARREAL, M. E. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.

2

Daysi Julissa García-Cuéllar

Jesús Victoria Flores Salazar

APROXIMAÇÃO INSTRUMENTAL: SUA ORIGEM E SEU DESENVOLVIMENTO NO PERU

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.45-66

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a Educação Matemática no Peru tem se desenvolvido com diversas pesquisas usando diferentes abordagens teóricas, uma delas é a Aproximação Instrumental.

Neste sentido, Artigue (2011) apresenta o desenvolvimento e contribuições da Aproximação Instrumental para a Educação Matemática como teoria necessária, quando se interage com tecnologias digitais. Explica que, no início dos anos 90, participou de um projeto da *Direção de Tecnologia* do Ministério de Educação da França. Esse projeto envolveu estar a cargo de um grupo de especialistas que pesquisavam o uso de calculadoras e *Computer Assistant System* - CAS no ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Médio.

A pesquisadora destaca que, a partir do contraste entre o discurso dos especialistas sobre o potencial dos CAS com o que realmente foi observado nas aulas, surgiram perguntas sobre o verdadeiro potencial das tecnologias em ensino e aprendizagem de matemática, e que esta foi a primeira semente do que depois seria a Aproximação Instrumental. Da mesma forma, no projeto que sucedeu esse primeiro, e no qual Michele Artigue trabalhou com a calculadora simbólica T1-92, investigou-se acerca dos conceitos e técnicas menos centradas no estudante e mais orientadas para a dimensão instrumental dos processos de aprendizagem. Neste contexto em que a autora e sua equipe de pesquisadores conectaram a Teoria Antropológica do didático - TAD com a perspectiva instrumental da Ergonomia Cognitiva de Rabardel e Vérillon, e desta conexão entre ambos aspectos teóricos da Educação Matemática e da Ergonomia Cognitiva nasceu a Aproximação Instrumental. Um esquema que sintetiza esta afirmação se apresenta na Figura 1.

Figura 1 - Aproximação Instrumental

Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, por parte da TAD estabeleceu-se um marco conceitual que permite enfrentar as necessidades teóricas para realizar uma análise integral dos processos de aprendizagem, que inclui o papel que têm as técnicas nas práticas humanas e o desenvolvimento conceitual que emerge delas. Também, por outro lado, a perspectiva instrumental da ergonomia cognitiva é uma ferramenta teórica que permite investigar o papel que as tecnologias digitais desempenham nos processos de aprendizagem, além de compreender os processos de apropriação da tecnologia digital por parte dos estudantes.

Nesse sentido, Artigue (2011) destaca que a união da TAD com a perspectiva instrumental da ergonomia cognitiva resultou muito produtiva, pois ao realizar uma experiência com estudantes do Ensino Médio que utilizaram a calculadora T1-92 para resolver uma tarefa sobre funções, na qual realizou uma análise a partir da Aproximação Instrumental, conseguiu "compreender melhor as causas dos efeitos limitados dos esforços institucionais realizados e como puderam

sumário

provocar mudanças significativas no futuro" (ARTIGUE, 2011, p. 21, tradução nossa). Isto porque identificou o valor epistêmico e pragmático das técnicas quando se interage com tecnologia digital.

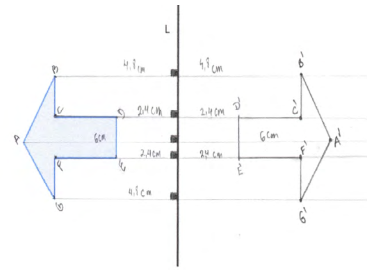
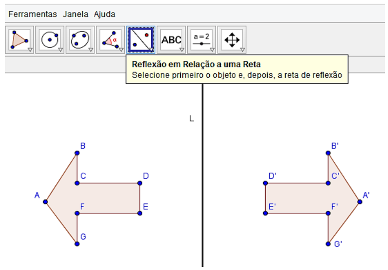
Entendemos por valor epistêmico aquele que permite que o estudante compreenda a matemática que se mobiliza quando resolve uma tarefa, enquanto o valor pragmático está diretamente relacionado com a mediação da tecnologia digital para resolvê-la. Significa que está relacionado com o potencial que ela tem para ajudar a compreender os objetos envolvidos. Nas palavras de Artigue (2011, p. 21, tradução nossa),

> As tecnologias digitais perturbam os equilíbrios tradicionais entre o valor epistêmico e pragmático das técnicas, equilíbrios que se estabeleceram progressivamente no limite da história, em uma cultura de lápis e papel, embora os cálculos tenham estado durante todo o tempo instrumentados por diversas ferramentas: ábacos, tabelas numéricas, ferramentas gráficas, etc. Os sistemas educacionais encontram dificuldades evidentes para reagir de maneira apropriada a essas perturbações. Contudo, estas dificuldades não são independentes da maneira em que, geralmente, esses sistemas tendem a se adaptar às evoluções tecnológicas apenas vendo a tecnologia como um coadjuvante pedagógico ou didático.

Do excerto acima é possível afirmar que as técnicas são diferentes para resolver uma tarefa com tecnologia digital do que para resolvê-la com lápis e papel. Nesse sentido, Artigue (2011) manifestou, em suas pesquisas iniciais com Aproximação Instrumental, a importância das técnicas instrumentadas nas aulas de matemática, visto que essas técnicas são diferentes daquelas com lápis e papel. Destacou que havia predisposição orientada para o valor pragmático das técnicas instrumentadas, mas o que dá legitimidade educacional a uma técnica não é apenas seu valor pragmático, também é seu valor epistêmico, por meio do qual se busca uma integração que permita equilíbrio entre esses dois valores das técnicas instrumentadas associadas a uma tarefa.

O exemplo apresentado na tabela 1, onde a tarefa é traçar a simetria de uma figura dada, duas técnicas são apresentadas, uma com lápis, papel e régua; e a outra com o uso do GeoGebra. Na técnica com lápis, papel e régua é possível observar alguns conhecimentos mobilizados, como perpendicularidade, equidistância, paralelismo, e inclusive que se reconheça e trace cada ponto simétrico dos vértices do polígono original. Significa que podemos reconhecer o valor epistêmico desta técnica. Porém, na técnica realizada com o GeoGebra isto não pode ser evidenciado, porque a tarefa foi realizada apenas com a ferramenta *simetria axial (Reflexão em relação a uma reta)*, e não se observa seu valor epistêmico, mas o valor pragmático da técnica com o GeoGebra, porque é mais econômica em relação aos passos ou procedimentos com lápis, papel e régua.

Tabela 1 - Técnicas para traçar a simetria de uma figura

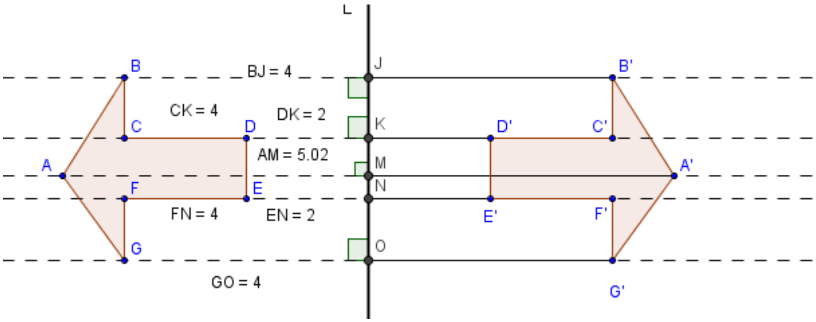
Técnica com lápis, papel e régua	Técnica com GeoGebra
	
Traçam-se retas auxiliares perpendiculares ao eixo de simetria (reta L) que passem por cada um dos pontos da figura (polígono ABCDEFG). Logo, traçam-se os pontos equidistantes ao eixo de simetria e aos pontos A, B, C, D, E, F e G. Finalmente, traça-se a simetria da figura (polígono A'B'C'D'E'F'G').	*Com a ferramenta reflexão em relação a uma reta, clica-se no polígono ABCDEFG; logo, clica-se no eixo de simetria (reta L) e cria-se o polígono simétrico A'B'C'D'E'F'G'.*

Fonte: Elaborada pelos autores.

É importante destacar que, atualmente, a tendência na área da Educação Matemática é perceber a tecnologia digital como um meio para a construção e/ou mobilização de conceitos matemáticos, o que realça o valor epistêmico das técnicas, sem deixar de lado seu valor pragmático.

Nesse sentido, a Figura 2 mostra uma segunda técnica realizada com o GeoGebra, em que a ferramenta *simetria axial (Reflexão em relação a uma reta)* estava em oculto da barra de ferramentas do referido software. Ao solucionar a tarefa (traçar a simetria de uma figura dada), traçam-se retas perpendiculares ao eixo de simetria (reta L) que passem por cada um dos vértices do polígono ABCDEFG. Logo, com a ferramenta *ponto de intersecção,* traçam-se os pontos J, K, M, N e O. Posteriormente, mede-se a distância que existe entre o ponto B e o ponto J, dando uma medida de 4 cm, permitindo traçar o ponto B' medindo 4 cm a partir de J, sobre a reta que contém o segmento BJ. Este último procedimento é realizado para cada um dos vértices do polígono (pontos A, B, C, D, E, F e G). Finalmente, traça-se a simetria da figura (polígono A'B'C'D'E'F'G'). Esta técnica instrumentada permite evidenciar seu valor epistêmico porque se mobilizam retas perpendiculares, ângulos retos, equidistância, segmentos, entre outras noções matemáticas; também seu valor pragmático, pois medidas como 5.02 cm (medida de AM) seriam difíceis de realizar com lápis, papel e régua, o que significa que permite medições com maior exatidão.

Figura 2 - Técnica realizada com o GeoGebra com a ferramenta *reflexão em relação a uma reta* em oculto



Fonte: Elaborada pelos autores.

A seguir, explicamos alguns elementos importantes da Aproximação Instrumental, o que permitirá compreender essa abordagem teórica.

APROXIMAÇÃO INSTRUMENTAL

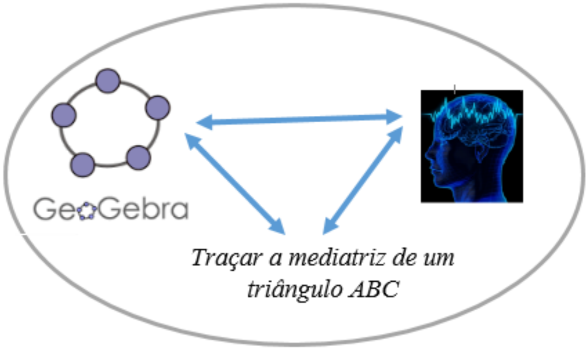
A Aproximação Instrumental (AI) permite evidenciar os valores epistêmicos e pragmáticos nos processos de ensino e aprendizagem de matemática mediada pela tecnologia digital.

As noções-chave da Aproximação Instrumental são as seguintes: *Esquema* - É uma organização invariável da conduta do sujeito para uma classe determinada de tarefa. *Artefato* - Sustenta a atividade do sujeito na execução de uma de tarefa, e pode ser material ou simbólico. *Instrumento* - É o que um sujeito constrói a partir de sua interação com um artefato, por isso é uma entidade mista, por agregar um artefato, que pode ser material ou não, e esquemas de utilização construídos pelo sujeito durante sua interação com o artefato.

Assim, de acordo com Rabardel (1995), a perspectiva Instrumental estuda a diferença que existe entre artefato, instrumento e os processos que desenvolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento, transformação que se denominou processo da Gênese Instrumental.

O pesquisador sustenta que o instrumento não existe em si, mas que é o resultado de associar o artefato com a ação do sujeito, e aponta que o artefato passará ao estado de instrumento quando o sujeito desenvolver esquemas de utilização correspondentes. Por exemplo, na Figura 3 pede-se para resolver a tarefa: *Traçar a mediatriz de um triângulo ABC.* Nesse exemplo concreto, o artefato será o GeoGebra, e o aluno ou usuário utilizará suas ferramentas para resolver a tarefa. Isso implica que ele gerará esquemas de utilização que ficarão evidentes em suas ações.

Figura 3 - O instrumento como parte artefato e esquemas de utilização para uma tarefa



Fonte: Adaptado de Drijvers e Gravemeijer (2005, p. 166).

A Gênese Instrumental consta de duas dimensões: a instrumentalização e a instrumentação.

> Os processos de instrumentalização estão direcionados para o artefato: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, usos desviados, atribuições de propriedades, transformações do artefato, de sua estrutura, de seu funcionamento, etc. [...] os processos de Instrumentação estão relacionados com o sujeito: com a emergência e evolução dos esquemas sociais de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, sua evolução por acomodação, coordenação e assimilação recíproca, a assimilação de artefatos novos aos esquemas já constituídos, etc. (RABARDEL, 1995, p. 215, tradução nossa).

Segundo as afirmações anteriores, as duas dimensões da Gênese Instrumental dependem de sua orientação:

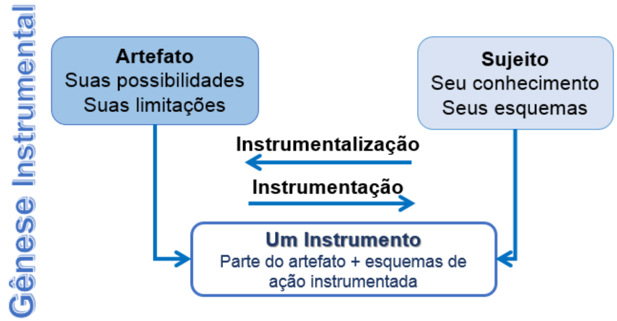
A instrumentalização está direcionada para a parte artefato do instrumento, e consta do enriquecimento das propriedades do artefato por parte do sujeito. Significa que é o resultado da atribuição de uma função ao artefato por parte do sujeito. Este processo fundamenta-se nas características e propriedades intrínsecas do artefato. As referidas propriedades constituem, para o sujeito, uma propriedade permanente de artefato. Já a função adquirida é uma propriedade extrínseca, que é atribuída pelo sujeito para que o artefato possa ser constitutivo de um instrumento. O autor distingue dois níveis de instrumentalização por atribuição de função a um artefato.

> Em um primeiro nível, a instrumentalização é local, relacionada com uma ação singular e com circunstâncias de seu desenvolvimento. O artefato é instrumentalizado momentaneamente [...] em um segundo nível, a função adquirida se conserva de maneira durável como propriedade do artefato em relação a uma classe de ações, de objetos da atividade e de situações. A instrumentalização é durável ou permanente (RABARDEL, 1995, p. 217, tradução nossa).

A instrumentação está direcionada para o sujeito. Refere-se à construção de esquemas de uso por parte do sujeito, relativos à execução de certas tarefas. Nesse processo realiza-se a assimilação de novos artefatos aos esquemas, e a acomodação dos esquemas para dar novos significados aos artefatos.

Nas duas fases da Gênese Instrumental mostradas na Figura 4, a instrumentalização está direcionada para a parte artefato do instrumento; e a instrumentação, para a parte de formação de esquemas por parte do sujeito em uma classe determinada de tarefas dadas.

Figura 4 - Gênese Instrumental



Fonte: Adaptado de Trouche (2004).

Nesse sentido, Bellemain e Trouche (2016) sustentam que essas duas fases não são independentes uma da outra, mas são entrelaçadas. Contudo, para distingui-las na análise de uma tarefa, pode-se focalizar, por um lado, o estudante (Em que medida a integração de um novo artefato modifica a forma de sua atividade?); e por outro, o artefato (Em que medida ele contribui como pista para a atividade do estudante, para seu poder criativo?).

Outra perspectiva é trazida por Drijvers *et al.* (2013), quando apresentam a Aproximação Instrumental em termos de três dialéticas: a *dialética artefato-instrumento,* que descreve o processo de um artefato que se converte em um instrumento nas mãos de um usuário, o que se conhece como gênese instrumental. A *dialética instrumentação-instrumentalização,* que se refere à relação entre o artefato e o usuário, pode ser aplicada para mostrar como o conhecimento de um estudante dirige o uso de um artefato (instrumentalização), e como uma ferramenta pode moldar e afetar o pensamento e as ações de um estudante (instrumentação). Finalmente, *a dialética esquema-técnica* refere-se às "[...] relações entre pensamento e gesto (ações)" (DRIJVERS *et al*., 2013, p. 26, tradução nossa). A partir de uma perspectiva prática, as técnicas podem ser vistas como "a parte observável do trabalho dos estudantes para resolver um tipo de tarefas dadas (significa um conjunto de gestos organizados) e esquemas, como os fundamentos cognitivos destas técnicas que não são diretamente observáveis" (DRIJVERS *et al.,* 2013, p. 27, tradução nossa).

NOÇÃO DE ESQUEMA NA APROXIMAÇÃO INSTRUMENTAL

Rabardel (2011), a partir dessa noção de esquema de Vergnaud[7] (1996), define os *esquemas de utilização - EU* como o conjunto estruturado das características generalizáveis da ação que permitem repeti-la ou aplicá-la em novos contextos. Esses esquemas, por sua vez, podem ser classificados em *esquemas de uso* (direcionados a tarefas secundárias); *esquemas de ação instrumentada - EAI* (direcionados à tarefa principal ou primária); e *esquemas de ação coletiva instrumentada - EAIC* (quando o coletivo compartilha o mesmo instrumento ou trabalha com a mesma classe de instrumento, buscando alcançar uma meta em comum).

Acerca dos esquemas de uso e de ação instrumentada, Rabardel (2011) considera que um mesmo esquema pode ter diferente status, significando que pode ser esquema de uso ou de ação instrumentada. Isto não se refere a uma propriedade do esquema em si mesmo,

7 Para Vergnaud (1996), um esquema é uma organização invariável da atividade para uma classe de situação dada. Está formado necessariamente por quatro componentes: Um objetivo, subobjetivo e antecipações; *Regras de ação*, formada de informações e controle; *Invariáveis operatórias* (conceitos em ação e teoremas em ação); e *Possibilidades de inferência* em uma situação.

mas ao seu status dentro da tarefa realizada pelo sujeito (sua relação com uma tarefa principal ou secundária). Portanto, segundo o objetivo da tarefa, é possível reconhecer o status do esquema, como de uso ou de ação instrumentada.

Com relação às técnicas instrumentadas, Trouche (2005) e Andersen (2006) explicam que elas são a parte observável de um esquema de ação instrumentada. Significa que um esquema de utilização inclui técnicas e conceitos para usar um artefato em uma classe específica de tarefas. Isto porque uma técnica instrumentada, ao incluir elementos conceituais, permitiria refletir o esquema ação instrumentada.

APROXIMAÇÃO INSTRUMENTAL: UM EXEMPLO

O exemplo que se apresenta é uma experiência realizada com estudantes de 12 ou 13 anos de idade, em uma sala de informática em uma escola particular de Lima - Peru. A sequência de tarefas foi realizada em dois encontros em que se aplicaram três tipos: a tarefa N° 0, que teve a finalidade de familiarizar os estudantes com algumas ferramentas do GeoGebra, que permitiram o desenvolvimento das tarefas N°1 e N°2; a tarefa N° 1, que foi centrada no desenvolvimento de esquemas de utilização da simetria axial; e finalmente propusemos a tarefa N° 2, em que se buscou que os estudantes pusessem em ação seus esquemas de utilização sobre o artefato simbólico de simetria axial. Essa organização pode ser observada na tabela 2.

Tabela 2 - Descrição dos encontros de aplicação das tarefas

Tarefas	*Encontro*	*Conteúdo*
Tarefas N° 0	*I*	*Introdução ao GeoGebra*
Tarefas N° 1 (A, B, C, D e E)	*I y II*	*Simetria Axial*
Tarefas N° 2 (A, B e C)	*II*	*Aplicações*

Fonte: García-Cuéllar (2014).

A seguir estão apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da tarefa 1C, que foi elaborada e colocada na pesquisa de García-Cuéllar (2014). Na análise *a posteriori* da tarefa 1C são mostradas as ações e processos realizados por uma estudante que chamamos Marcia.

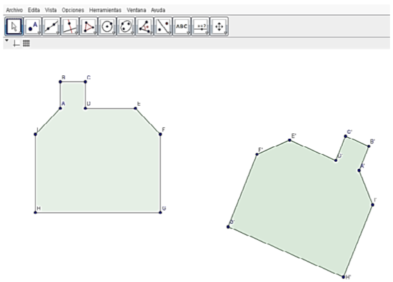
É importante destacar que as tarefas 1A e 1B foram tratadas e discutidas no artigo de García-Cuéllar e Salazar (2017); e as tarefas 1C, 1D, 2A e 2C, no artigo de García-Cuéllar e Salazar (2019).

TAREFA 1 C

Na Figura 5 é apresentado o enunciado da tarefa 1C da sequência realizada na experiência.

Figura 5 - Enunciado da Tarefa 1C

Abra o arquivo tarea1_C.ggb. Utilizando a ferramenta ponto médio, trace os pontos médios dos segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Com a ferramenta reta, trace a reta que passa pelos pontos médios marcados anteriormente. Anote suas observações. Trace o segmento AA' e meça um ângulo que se formará entre a interseção do segmento e a reta. Quanto mede o ângulo? Trace BB' e meça um ângulo que se formará entre a intersecção do segmento e a reta. Quanto mede o ângulo? O que você pode concluir a respeito dos ângulos que se formam entre a intersecção da reta e os segmentos traçados? Justifique.



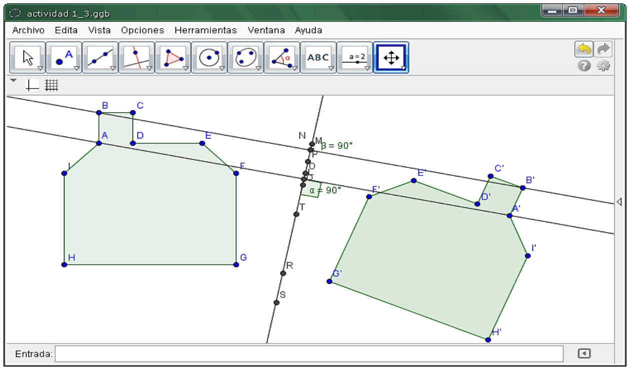
Fonte: García-Cuéllar (2014).

A tarefa tem como finalidade traçar o eixo de simetria não vertical, ou seja, com inclinação e sem quadrículas, pois na tarefa 1A e 1B foi trabalhado com o eixo de simetria vertical. *A priori,* esperava-se que os estudantes escolhessem a ferramenta ponto médio e traçassem os pontos médios dos segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Logo, traçassem a reta que passa pelos pontos médios marcados anteriormente. Finalmente, que medissem os ângulos que se formam entre a intersecção da reta e os segmentos traçados, e reconhecessem que são ângulos retos.

Para dar solução à tarefa, os possíveis esquemas de uso que os estudantes mobilizariam são: reta, segmentos, ponto médio, ângulos e perpendicularidade. Ainda, o possível esquema de ação instrumentada seria a noção de eixo de simetria como mediatriz dos segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'.

A posteriori, a estudante Marcia usou a ferramenta ponto médio do GeoGebra e traçou os pontos médios dos segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'; e depois, utilizando a ferramenta reta que passa por dois pontos, traçou a reta que contém todos os pontos médios. Além disso, fazendo uso da ferramenta reta que passa por dois pontos, traçou as retas que passam pelos pontos A e A', também a reta que passa por B e B'. Posteriormente, ela usou a ferramenta ângulo para medir os ângulos formados na intersecção das retas que contêm os segmentos AA' e BB' com a reta que contém os pontos médios, tal como se mostra na Figura 6.

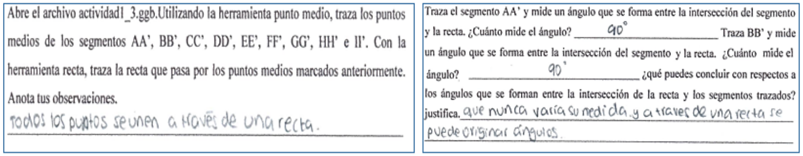
Figura 6 – Solução de Marcia na Tarefa 1C



Fonte: García-Cuéllar (2014).

A Figura 7 (a) mostra que Marcia conseguiu identificar que a reta que traçou contém todos os pontos médios de ambos polígonos. Da mesma forma, conseguiu perceber que, na intersecção dos segmentos com a reta, se formam ângulos retos, tal como menciona na Figura 7 (b), que demonstra um recorte de sua ficha de trabalho.

Figura 7 - Resposta de Marcia na Tarefa 1C



Abre el archivo actividad1_3.ggb.Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones. Todos los puntos se unen a través de una recta.

(a)

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° ¿qué puedes concluir con respectos a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. que nunca varía su medida. y a traves de una recta se puede originar ángulos.

(b)

Fonte: García-Cuéllar (2014).

Pela análise *a priori,* Marcia conseguiu o previsto para a Tarefa. Em outras palavras, as ações de Marcia indicam seus possíveis esquemas de uso, como ângulo, reta, ponto médio e mediatriz. Assim, poderíamos indicar que gerou o esquema de ação instrumentada *eixo de simetria como mediatriz.*

Nesse breve exemplo, em que Marcia desenvolveu uma técnica instrumentada, ao solucionar a Tarefa em um ambiente tecnológico, verificamos como o GeoGebra, permite identificar o valor pragmático e epistêmico dessa técnica[8]. O valor pragmático é reconhecido quando se traçam retas e pontos médios com as ferramentas próprias do GeoGebra, sem necessidade de usar uma régua e, portanto, sem fazer medições que poderiam não ser exatas com o uso da régua, é o potencial que a tecnologia tem para fazer o mesmo que faríamos sem ela, de forma mais eficaz ou eficiente. Já sobre o valor epistêmico, podemos afirmar que, ao gerar o esquema de ação instrumentada *eixo de simetria como mediatriz,* esse novo conhecimento foi concebido a partir de compreender objetos envolvidos, como ponto médio, reta, ângulo reto, equidistância, entre outros. Dito de outro modo, o valor epistêmico da técnica instrumentada está relacionado com o potencial que ela tem para ajudar a compreender objetos envolvidos.

Por outro lado, Balacheff (2000) indica que os valores pragmático e epistêmico das técnicas, muitas vezes, estão entrelaçados e não é possível separá-los, pois estão restritos e condicionados pelas limitações que a tecnologia tenha, e que podem afetar o domínio de validade epistêmico ao fazer a transposição informática dos objetos matemáticos envolvidos. Portanto, podemos perceber que o GeoGebra é uma tecnologia com grande potencial para o ensino, porque favorece a identificação dos valores epistêmico e pragmático da técnica.

O exemplo da tarefa 1C permite identificar que a estudante Marcia desenvolveu as fases de Instrumentalização e Instrumentação da Gênese Instrumental. Isto porque, em um primeiro momento, desenvolveu esquemas de uso das ferramentas do GeoGebra para poder solucionar a tarefa proposta, porque mobilizou seus esquemas de uso, como as noções de ponto médio, reta, ângulo reto, segmento,

8 Para Chevallard (1992), uma técnica é uma forma de fazer ou de solucionar uma tarefa. Para Drijvers e Gravemeijer (2005), uma técnica que se realiza em um ambiente tecnológico é chamada *técnica instrumentada*.

entre outros; que permitiram gerar o esquema de ação instrumentada *eixo de simetria como mediatriz*, ou seja, a Gênese Instrumental relacionada com a tarefa proposta ocorreu em Marcia.

INVESTIGAÇÕES NO PERU COM AI

A partir do estudo realizado por García-Cuéllar, Almouloud e Salazar (2019), foram identificadas pesquisas no período de 2013 a 2017 no Brasil e no Peru, que usaram como referencial teórico a Aproximação Instrumental - AI. Centramo-nos naquelas realizadas no Peru no período de 2013 a 2019, especificamente pelo *Grupo de Investigación de Tecnologías y Visualización en Educación Matemática* (TecVEM – Grupo de Pesquisa de Tecnologias e Visualização em Educação Matemática) e por estudantes de mestrado em ensino de matemática da *Pontificia Universidad Católica del Perú* (Pontifícia Universidade Católica do Peru). Abaixo, a tabela 3 esquematiza as pesquisas anteriormente mencionadas.

Tabela 3 – Pesquisas do grupo TecVEM com AI

Autor	*Año*	*Asesor(a)*
Chumpitaz, L.	*2013*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
García-Cuéllar, D.	*2014*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
León, J.	*2014*	*Mg. Miguel Gonzaga*
Silva, M.	*2017*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
Batallanos, J.	*2018*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
López, P.	*2019*	*Mg. Mihály Martínez-Miraval*

Fonte: Elaborada pelos autores.

A tabela 4 apresenta os artefatos de estudo em cada uma das pesquisas, além das fases da Gênese Instrumental nas quais se enfatizaram.

Tabela 4 - Artefatos e fases da Gênese Instrumental nas pesquisas

Autor	*Artefatos*	*Fases da Gênese Instrumental*
Chumpitaz, L. (2013)	*Função por seção*	*Instrumentalização*
García-Cuéllar, D. (2014)	*Simetria axial*	*Instrumentação*
León, J. (2014)	*Elipse*	*Instrumentalização*
Silva, M. (2017)	*Circuncentro*	*Instrumentalização e instrumentação*
Batallanos, J. (2018)	*Volume do octaedro regular*	*Instrumentalização e instrumentação*
López, P. (2019)	*Hiperboloide*	*Instrumentalização e instrumentação*

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como é possível inferir, nas pesquisas mostradas na tabela 4 estão enfatizados os artefatos simbólicos. Em outras palavras, os objetos matemáticos foram os artefatos e, assim que passaram pelo processo da Gênese Instrumental, converteram-se em instrumentos para os estudantes das diferentes experiências de estudo. É importante mencionar que as pesquisas de Chumpitaz (2013), García-Cuéllar (2014) e León (2014) abordaram apenas uma das fases da Gênese Instrumental (Instrumentalização ou Instrumentação), e como indicaram Bellemain e Trouche (2016), estas fases da Gênese Instrumental podem ser destacadas para a análise da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento da Aproximação Instrumental, em termos de Artigue (2002), alcançou avanço nas pesquisas em Educação Matemática acerca do uso de tecnologias digitais (calculadoras CAS; folhas de cálculo; Software, como o GeoGebra; entre outras), pois permitiu reconhecer os valores pragmáticos e epistêmicos das técnicas instrumentadas. Contudo, podemos afirmar que as tarefas também desempenham papel importante, pois a ativação de certas técnicas e conhecimento depende delas, e por isso não devem ser simples adaptações do que se realiza com lápis e papel. As tarefas que envolvem tecnologias devem permitir equilíbrio entre os valores epistêmico e pragmático das técnicas instrumentadas desenvolvidas pelos estudantes.

Diferentemente de outras realidades, especificamente da Europa, onde surgiu a Aproximação Instrumental, em países de América Latina, como Brasil e Peru, as pesquisas têm se centrado em artefatos simbólicos. Significa afirmar que se utilizou o mesmo objeto matemático como artefato que, mediante o processo da Gênese Instrumental, transforma-se em Instrumento para o sujeito.

Os avanços atuais da Aproximação Instrumental manifestam-se nas pesquisas sobre a Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004), que enfatiza a atuação docente para gerar a Gênese Instrumental de seus estudantes. Trouche (2018) dá um panorama de trabalho de pesquisa com os materiais e recursos dos docentes chamado Gênese Documental ou Aproximação Documental. No caso da América Latina, especificamente no Peru, estão sendo realizadas pesquisas que englobam aspectos de Orquestração Instrumental e espera-se realizar estudos sobre a Aproximação Documental.

REFERÊNCIAS

ANDERSEN, M. Instrumented in tool-and object perspectives. In: C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son, &N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference* “Technology Revisited”, University of Hanoi, 2006, 19-26. Disponível em: http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c63.pdf.

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 7, 245-274. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080#citeas

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2011, 6(8), 13-33. Disponível em: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948.

BALACHEFF, N. Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En GORGORIÓ, M.; DEULOFEU, J. (Eds.). *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* 70–88. 2000. Barcelona: Editorial Grao.

BATALLANOS, J. *Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/12143

BELLEMAIN, F. B.; Trouche, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática*, Nov. 2016. Bonito, Brasil. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233

CHEVALLARD, Y. A Theoretical Approach to Curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 1992, 13, 2/3, pp. 215-230.

CHUMPITAZ, L. *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/4514

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument: Examples of Algebraic Schemes. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library,* vol 36. Springer, Boston, MA, 2005.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics,* 2013, 82(1), 23–49.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. Simetría axial mediada por el GeoGebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2014. doi: 10.13140/RG.2.2.13450.47048

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo,* 2017, v.6, 68-82. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/28906

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Estudio de la génesis instrumental del artefacto simbólico simetría axial. Tangram: Revista em educação matemática, 2019, 2(3), 28-48. Doi: 10.30612/tangram.v2i3.9068

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; ALMOULOUD, S.A.; SALAZAR, J.V.F. Abordagem instrumental: uma revisão da literatura no Peru e no Brasil dos anos 2013 a 2017. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 2019, 32(2), 742-752. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/334046152_

LEÓN, J. *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652

LÓPEZ, P. *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/13406

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies: aproche cognitive des instrumentns contemporains.* Paris: Armand colin, 1995.

RABARDEL, P. *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

SILVA, M. *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2017. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/8727

TROUCHE, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2004, 9: 281–307.

TROUCHE, L. An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* Guin, Dominique, Ruthven, Kenneth, Trouche, Luc (Eds.), 2005, 83-112.

TROUCHE, L. Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza – una historia de trayectorias. *Revista Educación Matemática*, 2018, 30(3), 9-40. doi: 10.24844/EM3003

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas,* pp. 155-189. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.

3

Maria Ivete Basniak

Everton José Goldoni Estevam

A GÊNESE DOCUMENTAL COMO APORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO PARA PESQUISAS SOBRE DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE E TECNOLOGIA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.67-95

INTRODUÇÃO

As pesquisas no campo da aprendizagem profissional de professores que ensinam Matemática têm ampliado modelos acerca do conhecimento inerente à profissão docente para problematizar e compreender as implicações que a tecnologia[9], particularmente as tecnologias digitais, impõem ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Koehler e Mishra (2009), por exemplo, com base nas ideias de Shulman relacionadas ao Conhecimento Pedagógico de Conteúdo - PCK[10], incluem o conhecimento tecnológico em seu construto, de modo a elucidar elementos para abordar o Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo - TPACK. Tal construto é utilizado como ferramenta teórico-metodológica para investigar os diferentes níveis de conhecimento tecnológico e pedagógico de professores (MISHRA; KOEHLER, 2006), e mais especificamente, do Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo de Matemática – *Mathematics TPACK* (NIELS *et al.*, 2009; PALIS, 2010).

Estes contributos teóricos alicerçaram nossas pesquisas anteriores (BASNIAK; ESTEVAM, 2018a), relacionadas a investigações sobre conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo de professores de Matemática, quando relatam suas práticas em um contexto de grupo de estudos. Os resultados evidenciaram certa confusão pelos professores quanto ao conceito de tecnologia, um infundado encantamento por ela e incompreensões sobre aspectos didáticos e pedagógicos inerentes à sua integração no ensino de Matemática (BASNIAK; ESTEVAM, 2018a). Igualmente, indicaram a necessidade de ampliação e aprofundamento de lentes teóricas, de modo a possibilitar discussões e elucidações complementares.

9 Utilizamos o termo tecnologia, no singular, por nos referirmos a tecnologia como processo e produção humana.

10 As siglas utilizadas referem-se aos termos amplamente difundidos em inglês.

Nesse sentido, inicialmente deparamo-nos com os aspectos basilares da Gênese Instrumental (RABARDEL, 1995; 2011) como potenciais para apresentar contributos para análises quanto à aprendizagem dos alunos, permeada por recursos digitais e associada a práticas pautadas no Ensino Exploratório de Matemática (BASNIAK; ESTEVAM, 2018b; BASNIAK; ESTEVAM, 2019).

Entretanto, ao refletirmos sobre a gama de fatores que influenciam a prática pedagógica do professor, estendemos nossa compreensão sobre sua complexidade. Isso porque eles envolvem não apenas os recursos de que dispõem, mas também documentos orientadores, condições físicas e estruturais, salários, tempo de preparo de aulas, a possibilidade de formação e de troca de experiências e ideias com os colegas, as condições dos alunos com os quais trabalham, entre tantos outros. Deste modo, corroboramos as demandas de aporte teórico que favoreçam o desenvolvimento de pesquisas consistentes neste campo, as quais, em alguma medida, possam considerar esta multiplicidade de influências.

Após duas décadas estudando a apropriação de ferramentas digitais em sala de aula pelos professores de Matemática, Monaghan e Trouche (2016) chamam a atenção para o fato de esta ainda ser uma questão bastante complexa, que precisa ser problematizada, a partir das razões que conduzem ao uso ou não de determinados artefatos pelos professores em sua prática pedagógica. Isto porque, segundo os autores, investigar como deve ser utilizado determinado artefato digital no ensino de Matemática é muito diferente de investigar as razões pelas quais os professores integram este artefato em sua prática profissional. Neste contexto, é preciso considerar os artefatos digitais dentro da gama de recursos utilizados no planejamento e na realização de suas aulas. Ademais, como assinala a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992), a matemática ensinada consiste em uma forma transposta da matemática, adaptada para o estudo em uma determinada instituição. Monaghan e Trouche (2016) destacam que, especialmente no que se refere ao uso de artefatos digitais em sala de aula por professores de Matemática, o que ocorre normalmente é que, ao se deparar com determinado problema (ex. o uso de calculadoras no ensino), o professor não busca soluções entre os colegas ou institucionalmente. Ao invés disso, ele tenta sozinho e de forma individual encontrar a solução para o problema, sugerindo que "ensinar é mais um ofício do que uma profissão" (MONAGHAN; TROUCHE, 2016, p. 358, tradução nossa).

Admitindo, portanto, que tecnologias digitais, ainda que presentes no ambiente escolar, não estão integradas à prática do professor e, deste modo, não trazem mudanças ao processo de ensino da Matemática, bem como a necessidade de considerar em investigações neste campo os aspectos multifacetados que afetam essa prática, discutimos neste texto como a Gênese Documental (GUEUDET; TROUCHE, 2009) pode constituir aporte teórico-metodológico para as investigações sobre o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática. Para tanto, são apresentados os fundamentos teóricos desta abordagem, os quais são complementados com excertos de experiências e discussões realizadas em um contexto de um grupo de estudos de professores, orientado desde 2013 até o presente pela perspectiva de Comunidades de Prática de professores que ensinam Matemática como contexto de formação profissional (WENGER, 1998; ESTEVAM; CYRINO, 2019; ESTEVAM, no prelo).

ASPECTOS FUNDANTES DA GÊNESE DOCUMENTAL

A *Gênese Documental* (GUEUDET; TROUCHE, 2009) possui seus fundamentos na *Gênese Instrumental* (RABARDEL, 1995; 2011), a qual estuda a relação entre três elementos principais: artefato, esquema e instrumento.

Para Rabardel (1995; 2011), um *artefato* é algo suscetível de uso, elaborado para ser utilizado em atividades intencionais, tendo sofrido uma transformação de origem humana. Assim, uma caneta, um celular, um idioma são exemplos de artefatos.

Por outro lado, um *instrumento* está relacionado ao processo de ação de um sujeito que utiliza um artefato para uma determinada ação. Assim, o instrumento designa o artefato em uma situação em que está sendo utilizado, “em uma relação instrumental com a ação do sujeito, como meio desta ação” (RABARDEL, 2011, p. 92, tradução nossa).

Por fim, “um *instrumento* resulta de um *processo*, denominado *gênese instrumental*, por meio do qual o sujeito constrói um *esquema* de utilização do *artefato* para uma determinada classe de situações” (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 204, grifos dos autores, tradução nossa). Neste contexto, um *esquema* é determinado pelos autores a partir de Vergnaud, que o definiu com base em Piaget, como “uma *organização invariável de atividade* para uma dada classe de situações” (GUEUDET, TROUCHE, 2009, p. 204, grifos dos autores, tradução nossa). Assim:

Instrumento = Artefato + Esquema de Utilização

A partir da distinção entre *artefato* e *instrumento* introduzida por Rabardel (1995, 2011), Gueudet e Trouche (2009) estabeleceram uma distinção entre *recursos* e *documentos*. Os autores utilizam o termo *recursos* para enfatizar a variedade de artefatos que podem ser utilizados por um professor, e assim, um recurso pode ser “um livro, um software, a folha de resolução de um aluno, uma discussão com um colega, etc.” (GUEUDET; TROUCHE, 2008, p. 205, tradução nossa).

Para os autores, um recurso nunca é isolado, porque um professor utiliza um conjunto de recursos na documentação do seu trabalho, ocorrendo um processo de gênese, produzindo o que denominam *documento*, que pode ser resumido pela fórmula:

Documento = Recursos + Esquema de Utilização

Um documento se constitui, portanto, a partir dos recursos que são utilizados associados aos esquemas de utilização, que adquirem *status* de documento por meio de um processo de gênese alicerçado no movimento de incorporação e revisão dos recursos ao trabalho do professor.

Ao lidar com um conjunto de recursos ou um documento, é necessário levar em consideração três componentes entrelaçados: i) componente material - papel, computador; ii) componente de conteúdo matemático - noções envolvidas, tarefas matemáticas e técnicas; iii) componente didático - elementos organizacionais (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Isto porque, nesse processo, o professor cria *esquemas* de utilização deste conjunto de recursos para a mesma classe de situações, em diferentes contextos.

Além disso, um *esquema* de utilização de um conjunto de recursos envolve uma parte observável e outra invisível. Os primeiros são denominados pelos autores de *usos*, que correspondem às regularidades na ação do professor para a mesma classe de situações em diferentes contextos. Já os aspectos invisíveis constituem os *invariantes operacionais*, que compreendem a estrutura cognitiva que guia a ação (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Assim, o processo de gênese é contínuo e nunca é isolado. Ele pertence ao sistema de documentação do professor, evoluindo por meio de gêneses documentais, representado por Gueudet e Trouche (2009) por uma nova equação:

Documento = Recursos + Usos + Invariantes Operacionais

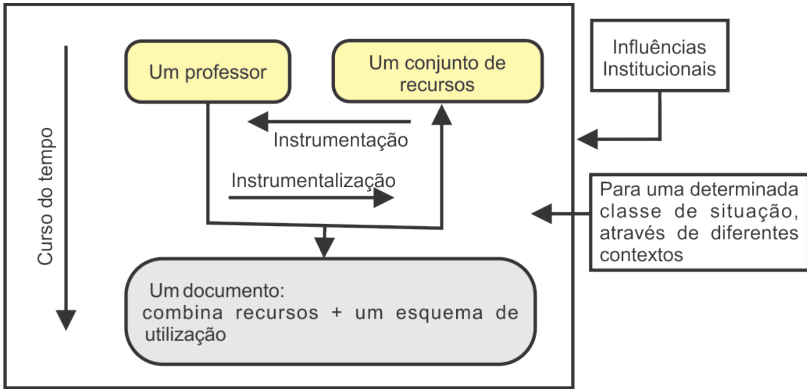
Gueudet e Trouche (2009) salientam que a atividade profissional possui uma dimensão produtiva, que compreende o resultado do trabalho realizado, mas a atividade implica, também, uma modificação da prática e das crenças profissionais do sujeito, dentro de uma dimensão construtiva. Essa mudança influencia outros processos de produção, de forma que essa relação *produtiva/construtiva* tem uma natureza dialética. Como exemplo, os autores referem pesquisas anteriores em que o *design* e a execução de uma tarefa foram associados à evolução na prática, não se limitando à integração de um novo recurso.

Naturalmente, os estudos não devem se ater ao aspecto material dos documentos, mas investigar, também, a evolução dos usos e invariantes operacionais. A integração de um novo recurso corresponde a um processo de gênese, desenvolvendo um documento a partir dele e de outros recursos, e este documento deve ter seu lugar dentro do sistema de documentação. Os autores salientam três questões principais das suas investigações: i) os processos de gênese aplicam-se a um conjunto complexo de recursos; ii) eles envolvem aspectos produtivos e construtivos; iii) as razões do envolvimento de um novo recurso no desenvolvimento de um documento (denominado pelos autores de *integração de um recurso em um documento*) são intrincadas, mas o estudo do sistema de documentação permite esclarecer algumas dessas razões.

Gueudet e Trouche (2009) salientam que esses processos são centrais, de forma que o trabalho de documentação do professor é fortemente ligado ao seu desenvolvimento profissional. Isso porque eles dão evidências dos diversos domínios envolvidos em sua prática letiva, bem como em outras funções que desempenham, intrinsecamente associadas a seu autoconhecimento e suas capacidades próprias (PONTE, 1994). Assim, faz sentido estudar a Gênese Documental articulada ao desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.

A Gênese Instrumental tem uma natureza dupla, de forma que, por um lado, a atividade do sujeito orienta a maneira como o artefato é usado e, de certa forma, molda-o (*instrumentalização*); e por outro, as possibilidades e restrições do artefato influenciam a atividade do sujeito (*instrumentação*). De forma similar, Gueudet e Trouche (2009) introduzem essa dupla natureza na Gênese Documental (Figura 1), de forma que, por um lado, a atividade do professor interfere na apropriação dos recursos (*instrumentalização*) e, por outro, os recursos influenciam a atividade dos professores (*instrumentação*).

Figura 1 – Esquema de representação da Gênese Documental

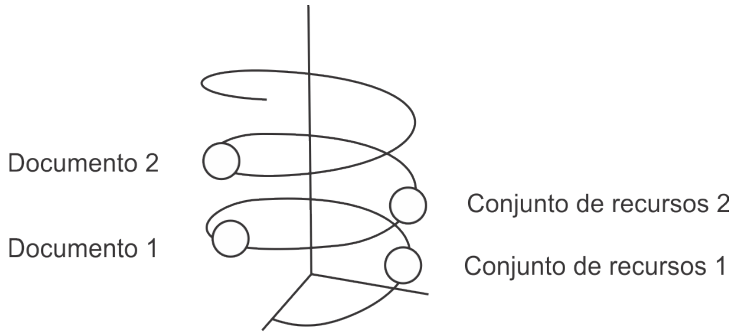


Fonte: Gueudet e Trouche (2009, p. 206, tradução nossa).

A Figura 1 representa o processo de *Gênese Documental.* Observamos que a dimensão da *instrumentalização* representa os processos de apropriação e reformulação de um (conjunto de) recurso(s) pelo professor, enquanto a dimensão da *instrumentação* conceitua a influência dos recursos que o professor utiliza sobre sua atividade. Assim, uma gênese documental não deve ser considerada uma máquina de transformação de um conjunto de recursos como entrada e um documento como saída, porque é um processo contínuo, em articulação ao processo de desenvolvimento profissional docente. Gueudet e

Trouche (2009) consideram, portanto, que um documento desenvolvido a partir de um conjunto de recursos fornece novos recursos, que podem estar envolvidos em um novo conjunto de recursos, que levará a um novo documento, em uma relação dialética entre recursos e documentos, representada pelos autores por uma hélice, enrolada em torno de um eixo que representa o tempo (Figura 2).

Figura 2 - Representação esquemática de uma gênese documental



Fonte: Gueudet e Trouche (2009, p. 206, tradução nossa).

Gueudet e Trouche (2009) salientam, citando Rabardel e Bourmaud (2005), que os instrumentos desenvolvidos por um sujeito em sua atividade profissional constituem um sistema cuja estrutura corresponde à estrutura da atividade profissional do sujeito. Os autores também consideram que, desta mesma forma, um dado professor desenvolve um sistema estruturado de documentação que evolui junto com sua prática profissional. Neste sentido, os autores salientam que, do ponto de vista da pesquisa, a observação e análise do sistema de documentação permite melhor compreensão do desenvolvimento profissional do professor e, em particular, permite capturar a evolução introduzida por recursos digitais.

Neste trabalho, não detalhamos a estrutura de um sistema de documentação que, como pontuado por Gueudet e Trouchen (2009), carece de estudo específico e levanta questões metodológicas delicadas. Isso porque requer a observação de longo prazo em lugares diferentes, tanto fora da sala de aula quanto no próprio local de trabalho do professor. Estes aspectos constituem enfoques de pesquisas ainda em andamento.

Apresentamos, contudo, alguns dados empíricos, situados particularmente em dois encontros realizados com a Comunidade de Prática Refletir, Discutir e Agir sobre Matemática – CoP-ReDAMAt[11] que, acreditamos, podem contribuir para elucidar aspectos-chave da teoria em questão.

ARTICULAÇÃO DOS ASPECTOS FUNDANTES DA GÊNESE DOCUMENTAL NA EXPERIÊNCIA QUE REALIZAMOS NA COP-REDAMAT

Os dados que problematizamos são decorrentes de dois encontros, com duração entre uma hora e meia e duas horas cada, ocorridos no final do ano de 2017. Neles foram realizadas a resolução e posterior discussão de uma tarefa intitulada Táxi (Figura 3), a qual foi elaborada por alunos da Licenciatura em Matemática no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), e proposta por uma das pesquisadoras, devido a esta tarefa envolver conceitos de álgebra (cerne das discussões do grupo de professores naquele período) e o software GeoGebra.

11 Para compreensão sobre a trajetória deste grupo que deu origem à CoP-ReDAMat, bem como suas características, recomendamos a leitura de Estevam e Cyrino (2019) e Estevam (no prelo).

Figura 3 – Tarefa Introdução às equações por Táxi

TAREFA 1 – Introdução às equações por Táxi

O arquivo pode ser acessado na página PIBID Matemática Unespar Campus União da Vitória <***http://pibidmatfafiuv.webnode.com/tarefas-com-o-geogebra/***>*. É necessário baixar e descompactar o arquivo para que ele funcione corretamente (o arquivo não funciona se for aberto diretamente da pasta compactada). Após descompactar o arquivo, acesse a pasta descompactada que foi criada e abra o arquivo tarefaequacoes.html. O arquivo funciona corretamente nos navegadores Google Chrome e Mozilla Firefox.*

No arquivo ***tarefaequacoes.html***, observe o percurso que pode ser percorrido por um taxista saindo da Praça Coronel Amazonas e selecione a opção ***Mostrar tudo***. Em cada corrida é cobrado um valor inicial fixo de R$ 5,00 e um valor por quilômetro percorrido de R$ 2,50 (estes valores podem ser alterados no arquivo). Para movimentar o táxi, clique com o mouse sobre o ponto verde no táxi e use as setas no teclado. *O arquivo possibilita que o táxi ande em qualquer direção no percurso definido, mesmo com o mapa no arquivo apresentando setas para indicar a mão correta em determinadas ruas. Com isso, é possível falar sobre a importância de respeitar as leis de trânsito.*

1. Um passageiro deseja ir do ponto inicial até o destino 1. Movimente o táxi até o destino 1 e responda às perguntas:

a) Quais valores foram alterados?

b) Qual é o valor a ser pago?

c) Escreva as operações utilizadas para calcular esse valor, e represente essas operações substituindo os valores que são alterados por letras.

2. Se o passageiro quiser ir do ponto inicial até o destino 2 (para voltar o táxi para a origem e limpar os valores no arquivo, basta clicar no botão **Zerar** e, em seguida, **Mostrar tudo**), lembre-se que, para mover o táxi, é necessário clicar no ponto verde sobre o táxi e utilizar as setas do teclado.

a) Quais valores foram alterados?

b) Qual é o valor a ser pago?

c) Escreva as operações utilizadas para calcular esse valor. Represente essas operações substituindo os valores que são alterados por letras.

3. Selecione a opção **Zerar**. Outro passageiro deseja ir do ponto inicial até o destino 3 (Lembre-se de clicar no ponto verde sobre o táxi para movimentá-lo, e utilize as setas no teclado).

a) Qual é a distância percorrida?

b) Qual é o valor a ser pago pela corrida?

4. Um passageiro quer sair do ponto inicial, ir até o destino 3 e, após, voltar para o destino 2. Observe que há setas no mapa que indicam a direção na rua que o carro pode ir.

a) Qual será a distância percorrida?

b) O valor a ser pago será o mesmo na questão 3 item b? Por quê?

5. Observando as questões anteriores, qual é a relação entre a distância e o valor a ser pago?
6. Escreva a expressão que representa a relação entre uma distância percorrida qualquer e o valor a ser pago.
7. Selecione a opção ***Zerar*** e, após, selecione a opção ***Mostrar somente valor a ser pago***. Outro passageiro deseja ir do ponto inicial até o destino 4.
a) Qual é o valor a ser pago pela corrida?
b) É possível calcular qual foi a distância percorrida? Como?
c) Escreva a expressão que representa a relação entre esta distância e o valor a ser pago.

Fonte: Lima *et al. (*2017, p. 28-29).

Esses professores participam de forma voluntária dos encontros da CoP, em que são estudados e debatidos dilemas de sua prática profissional, negociados no âmbito do grupo, partindo dos próprios interesses decorrentes de suas experiências (ESTEVAM; CYRINO, 2019). Os encontros ocorrem regularmente na Universidade (local sugerido pelos professores participantes), geralmente a cada duas ou três semanas, coordenados por dois professores pesquisadores (autores deste trabalho).

No encontro do dia 29/09/2017, participaram três professores de Matemática (José, Luis e Luciana[12]) que atuam em escolas da rede pública do estado do Paraná há pelo menos 10 anos (contabilizados no ano de 2017). Nos primeiros quarenta minutos, os professores resolveram a tarefa e, em um segundo momento, teceram comentários sobre seu potencial e suas impressões ao resolvê-la. No segundo momento, mostraram-se entusiasmados a proporem a tarefa a seus alunos, conforme excerto a seguir, das transcrições da gravação em áudio, que é realizada de todos os encontros.

12 Os professores participantes da CoP-ReDAMat são identificados por pseudônimos, conforme termo de consentimento assinado, e os formadores (autores do capítulo) por formadora e formador, respectivamente.

José:	*Daria para a gente testar isso com as turmas…*
Luciana:	*Eu tenho dois nonos anos e um sétimo...*
Luis:	*Eu já estou louco para testar!*
Formador:	*Eu acho que é interessante a gente levantar algumas conjecturas [...].*
Luciana:	*Vamos testar?*

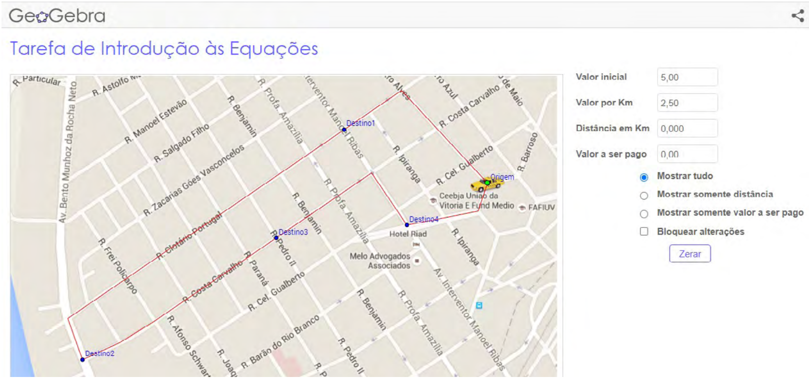
(Encontro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Deste modo, no encontro posterior, realizado excepcionalmente cerca de dois meses depois, José, Luis e Luciana trouxeram os resultados do desenvolvimento da tarefa por seus respectivos alunos, e mais um professor (Paulo), que havia faltado no encontro anterior, integrou as discussões realizadas. Essas discussões oferecem indícios dos recursos e esquemas empregados pelos professores, bem como das respectivas implicações para sua prática profissional.

A Figura 4 ilustra a representação estruturada em um *applet*[13] no GeoGebra, que consiste em um recorte de uma região da cidade com (possíveis) trajetos a serem percorridos por um táxi, a partir de quatro destinos previamente fixados, e considerando a taxa inicial de uma corrida, a distância e o custo por quilômetro rodado (ver tarefa na Figura 3). Deste modo, entendemos que esse *applet* constitui um exemplo de artefato, que serve de base para a resolução da tarefa Introdução às Equações.

13 Designamos por *applets* construções interativas criadas com o *software* GeoGebra, as quais permitem a manipulação e animação de componentes, por vezes de maneira intuitiva, sem a exigência de conhecimentos mais aprofundados sobre o software. Sua principal função é de auxiliar no entendimento de conteúdos a partir de representações dinâmicas de fenômenos, relações ou processos.

Figura 4 – *Applet* utilizado na tarefa Introdução às Equações por Táxi



Fonte: Elaborada pelos autores.

Entretanto, ao ser utilizado pelos professores para resolver a tarefa, a partir da movimentação do carrinho pelo(s) percurso(s) desejado(s), o *applet* assume o *status* de instrumento. Isso porque diferentes usos podem ser empregados para ele. É possível modificar as caixas que são assinaladas: mostrar tudo, mostrar somente distância, mostrar somente valor a ser pago, bloquear alterações, zerar. Também se pode indicar diferentes valores para elas: valor inicial, valor por quilômetro, distância em quilômetro. Ainda é possível movimentar o carrinho em diferentes sentidos, mesmo no sentido proibido da via, como expressa o excerto a seguir, em que, enquanto um professor obedeceu a orientação da via, os demais movimentaram o carrinho livremente, o que contribuiu para muitas discussões no grupo.

Luciana: *Ir para o 3 e voltar para o 2 [referindo-se aos destinos marcados no mapa]. Quer dizer, então, que, se voltar para o 2, ele tem que ter passado anteriormente. Sempre tem que fazer esse mesmo trajeto?*

José: *No sentido da ordem, né? [referindo-se à orientação da rua].*

Luciana: *Uhum… Ele não pode sair da origem e ir direto no 3?! Porque as flechinhas estão sempre indicando que ele vai fazer isso, né?*

Formadora: *A mão [orientação da rua]?*

Formador:	*Ele faz sempre a mão. E ele tem que fazer o trajeto, não dá para cortar pelo meio.*
Luciana:	*É que na 3 não diz isso. Diz só ir do ponto inicial até o 3, daí eu já pensei que podia ir por aqui. Daí depois que eu vi que as flechinhas são assim.*
Formador:	*Ah, o sentido contrário.*
Luciana:	*Que daí eu li a próxima pergunta e vi isso, que dizia que era voltar.*
Luis:	*Para trás, ele [o taxi] não volta?*
Formadora:	*Volta. O carro anda para trás.*
Formador:	*Mas se o sentido da rua é só para um lado, ele vai na contramão?*
Formadora:	*Vai.*
Luciana:	*Por isso que eu fiz, daqui vir [do destino 1 ir para o 4 e para o 3] aqui no 3…*
Luis:	*Só que, quando você volta, o preço continua aumentando porque a quilometragem vai aumentando. Se você voltar na contramão, ele vai te cobrar. Legal, gostei.*

(Encontro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Percebe-se que alguns professores vislumbram a possibilidade de o *applet* reproduzir uma situação real porque, mesmo sendo contra as normas de trânsito, é possível trafegar na contramão em uma via. Podemos considerar que temos usos diferentes do mesmo artefato porque, ao testarem as possibilidades para movimentar o carrinho, os professores descobriram novas formas, algumas inclusive não perspectivadas inicialmente, quando de sua construção pelos autores. Entretanto, as discussões coletivas entre os professores e formadores conduziram à compreensão de uma nova possibilidade com potencial para enriquecer as discussões em sala. Assim, configurou um novo recurso que passou a integrar o conjunto de recursos que o professor dispõe para trabalhar com esse *applet*, que é composto desses diversos recursos em conjunto com a tarefa proposta (Figura 3). De acordo com os professores, essa variedade de recursos pode ser interessante para o trabalho pedagógico, quando integrado a outros. Mostra alinhamento, inclusive, àquilo que é esperado pela instituição a que estão vinculados, e que exige associação com questões práticas, como revela o excerto a seguir.

Luis:	*Eu adorei o "mapinha" com o "negócio" aqui [referindo-se à possibilidade de movimentar o carrinho].*
José:	*Bem legal. Acho que eles [os alunos] podem testar e, além de tudo, tem um conhecimento um pouco maior aqui, né?*
Formador:	*Conhecimento maior em relação a quê, José?*
José:	*Que mostra um pouquinho mais concreto. Porque o carrinho vai ter que andar, e tal. É uma coisa que torna mais prática.*
Luciana:	*Uma coisa bem pertinente, porque pode ser da convivência dele [do aluno], porque está ali, a cidade onde ele mora.*
José:	*Isso, mais próxima da realidade. Sair daqui [e] ir ali.*
Luciana:	*Contextualização, que tanto eles querem [referindo-se à Secretaria do Estado da Educação].*
Formador:	*Tem esse apelo para a realidade, num contexto real para eles.*
José:	*Mapa, hoje em dia, está muito em voga essas coisas, como o GPS.*
Luciana:	*De repente, até para eles saberem programar o GPS.*

(Encontro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

No excerto, para além do *applet*, da tarefa, das discussões com os colegas, são comentadas as possibilidade de usar o GPS, bem como o potencial da situação para atender às demandas presentes em documentos orientadores do ensino de Matemática que, dentre outras questões, sugerem que os conteúdos sejam trabalhados de forma contextualizada (PARANÁ, 2008). Isso evidencia que a dimensão coletiva, por meio da problematização de percepções, crenças e experiências, permite a ampliação de conhecimentos e do conjunto de recursos disponível em uma determinada situação permeada pela tecnologia. Neste sentido, Gueudet, Pepin e Trouche (2013) destacam que as interações com colegas, geralmente a partir dos recursos, são cruciais para o desenvolvimento profissional dos professores.

Luis:	*Eu acho que o que daria mais trabalho é a última ali, a 7. Que dá para usar a proporção. Mas aí, para o 8º ano, eu não sei, eles podem "engasgar" nessa última, talvez por não ter a experiência de proporções.*
Formador:	*Mas eles estudam proporções, né?*
Luciana:	*No 7º ano, já tem.*
Formador:	*Mas vocês acham que essa 7 é a questão mais complexa de todos os itens?*
Luis:	*Por que ali é possível calcular qual foi a distância percorrida? Como?*
Formador:	*É que inverte a expressão, né? Inverte a equação.*
Luis:	*Então dá 320 metros, e isso equivale a 80 centavos.*
José:	*Você fez ao contrário?*
Luciana:	*Meu Deus, Luis! Não complique!*
Formador:	*Ah, mas é interessante, é uma coisa que os alunos podem fazer.*
Formadora:	*Como vocês pensaram?*
Luciana:	*Ah, eu fiz as operações inversas.*

(Encontro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Discussões como as aqui referidas oferecem oportunidades para que o professor reflita sobre o que está trabalhando e como a integração de uma situação como a problematizada impacta sua prática profissional. As dificuldades que os alunos teriam, por exemplo, constituem aspectos muito presentes nas discussões, provocados pelas (diferentes) formas como os próprios professores resolveram a tarefa, os usos que fizeram do *applet*, estratégias e procedimentos que poderiam ser empregados, bem como suas implicações para os objetivos de aprendizagem estabelecidos. O excerto acima explicita como a professora Luciana confronta a forma como o Professor Luis resolveu o item 7 da tarefa, por considerá-la mais complexa que a utilizada por ela.

Luis e Luciana são professores em colégios diferentes, com realidades distintas e turmas diversas de 7º e 8º anos. O uso de diferentes recursos é permeado pelas condições de trabalho que o professor possui, ou seja, pelas condições físicas e materiais (componente material) que cada professor encontra em seu ambiente de trabalho, bem como as influências decorrentes de suas experiências e conhecimentos anteriores (a componente didática), que se relacionam com a componente de conteúdo matemático. Neste sentido, as diferentes estratégias empregadas explicitam possibilidades de resolução que podem ampliar as percepções e, particularmente, as expectativas dos professores em relação aos alunos. Isto permite que eles lidem de maneira mais abrangente com as questões, estratégias e representações a que os alunos podem recorrer no decurso da resolução da tarefa. Para tanto, a interação do *applet* parece exercer papel fundamental nesse processo de elaboração e depuração de estratégias, dando indícios de processos de instrumentalização na Gênese Documental.

Para elucidar essa questão, recorremos a um episódio em que o professor José se refere à realização da tarefa de duas maneiras diferentes. Na primeira, sem o uso do computador, fazendo o desenho no quadro e solicitando que os alunos *imaginassem* como mover o carrinho; e a segunda, utilizando o *applet* no computador.

José: *Como eu fui tentar nos laboratórios e não consegui porque os nossos todos são do Paraná Digital [referindo-se aos computadores], e então eu só tive cinco ou seis computadores funcionando e mais o meu notebook. Então, eu fiz com alguns que eu já tinha feito [em sala de aula sem o uso do computador], eu pedi para alguns que podiam vir fazer e dois que não tinham conhecimento da tarefa, que fizeram pela primeira vez. São esses aqui [mostrando as resoluções dos alunos que não tinham feito a tarefa anteriormente], e esses aqui refizeram. Eles já tiveram contato [referindo-se à tarefa].*

[...]

[os formadores questionam quais as diferenças que José percebeu entre a tarefa realizada sem e com o uso do computador]

José: *Eu até pedi para alguns deles colocarem aqui [nas folhas de resposta], mas [o applet] chama mais a atenção. Principalmente lá [na realidade do colégio], em que a maioria não tem contato com as tecnologias. Ver o carrinho e interagir com a questão, chama mais a atenção... É mais atrativo.*

Formadora: *Mas em termos de compreensão do conteúdo?*

Formador: *[observando folhas de registro dos alunos] Este aqui escreve: "As tarefas são uma boa maneira de atrair os alunos e para que os alunos percebam diversas formas de chegarem ao resultado [...]. Porém, essa tarefa poderia ser adaptada a todos os tipos de aparelhos eletrônicos". Acho que é porque não funcionou. [...] Esse aqui também: "Na minha opinião, é um jeito para que os alunos compreendam melhor as técnicas de resolução".*

[...]

(Encontro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

A componente material, nomeadamente a falta de computadores e materiais para realizarem tarefas, como a proposta, que favoreçam abordar o conteúdo de forma conceitual e não apenas a técnica de resolução de exercícios, é referenciada pelos professores como algo que dificulta a realização de práticas em sala de aula transcendentes a aulas expositivas. O professor José, por exemplo, menciona que, para conseguir desenvolver a tarefa em sala de aula, por não dispor dos computadores necessários para trabalhar com uma turma inteira de alunos (cerca de 40), recorreu a uma adaptação *desenhando* no quadro o mapa presente no *applet* e solicitando que os alunos *imaginassem* como realizar as ações propostas de maneira dinâmica. Na sequência, usou de seus equipamentos próprios para que pudesse realizar a tarefa com um grupo menor de alunos, com o *applet* no computador. Não tivemos acesso ao que os alunos responderam na tarefa realizada em sala, porque o professor trouxe, para o encontro, somente as tarefas que os alunos responderam usando o computador. Contudo, isso pode ter relação com um desempenho dos alunos (que não tiveram acesso com *applet*) muito aquém do esperado, e que conduziu José a buscar meios para realizar a tarefa com outro grupo de alunos, com o uso do computador.

Ao final da discussão, os formadores provocaram reflexões específicas sobre o conteúdo matemático envolvido, o qual referia a introdução à Álgebra e, mais particularmente, às Equações. Neste momento, revelam-se frustrações ancoradas em incoerências entre as expectativas dos professores e aquilo que emergiu das atividades dos alunos. Ao serem questionados sobre aspectos pedagógicos da experiência, emergiram os seguintes excertos.

José: *Eu perguntei para eles a questão da expressão, incógnita e variável... Os alunos do primeiro [ano do Ensino Médio] ficaram bem na dúvida... em diferenciar equação, expressão, o que é variável. E os do terceiro [ano do Ensino Médio] foram um pouco melhor, já tinham uma ideia.*

Formador: *Porque eles já tinham estudado bastante função também, né?*

José: *Tinham uma ideia melhor disso e os do primeiro ano, quando eu perguntava se tem expressão aqui ou se tem equação, ficavam meio assim... Aí, perguntei se eles sabiam o conceito e falaram que não... Aí comecei a mostrar para eles... Até comentar que aquilo na Matemática não é aquilo e pronto, mas depende do contexto que você analisa. Pode ser uma expressão ou pode ser uma equação... Pode ser uma variável ou incógnita, assumir só um valor… Deu para explorar essa questão que aparece.*

Formador: *Então, possibilitou discutir essas diferentes ideias.*

Luciana: *Com o sétimo [ano do Ensino Fundamental] também, porque era o começo que a gente estava vendo. Então, aproveitei para discutir esses aspectos sobre quando é uma equação… Na verdade, com eles, eu não trabalhei variável, só incógnita, porque era só o início [do trabalho com álgebra]…*

Formador: *Só como ideia de valor desconhecido…*

Luis: *Para os meus [alunos], incógnita e variável são a mesma coisa. Não há o que diferencie. Acho que eu esperava que eles copiassem ou vissem alguma coisa das outras tarefas que a gente tinha feito. Aí, [a resolução] seria $y = 2{,}5\,x + 5$. Eu esperava que alguém achasse isso e que achassem fácil, mas não, eles põem V de valor, P de preço, tudo bem mudar a incógnita, não tem problema. Mas até chegar a isso, muita água rola embaixo da ponte. Eu acho que eu fui com muita expectativa boa a respeito disso e não se concretizou, sabe... Deu mais frustração do que animação, mas em geral eles conseguiram fazer a descrição do que tinha que fazer. Os que não conseguiram fazer uma expressão, mesmo trocando variável por incógnita.*

Luciana: *E nem para dizer que a pergunta era a mesma que estava repetindo de vários jeitos…*

Luis: *E alguns até [diziam]: "Mas, professor, não é a mesma resposta dessa aqui?". E eu falei: "Você acha que a mesma resposta? Escreva".*

(Encontro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

Os professores esperavam que os alunos diferenciassem incógnita de variável, componente de conteúdo, bem como reconhecessem expressões – no caso, equações – que modelassem as situações em causa nos itens, tendo em conta que, com exceção dos alunos de Luciana, os demais já haviam trabalhado com conteúdos algébricos. Contudo, as ideias emergentes com os alunos do professor Luis não sugerem isso, e ele expressa certa frustração. Neste sentido, o grupo é provocado a refletir sobre possíveis causas desses problemas que, aparentemente, referem um invariante operacional relacionado aos aspectos cognitivos dos alunos em relação à significação da Álgebra.

Formador: *Mas será que não é a questão do que eles [os alunos] estão acostumados, talvez?*

José: *Essa tarefa foge bem do padrão que a gente está acostumado e que eles estão acostumados a fazer.*

Luis: *Mas eles não transpõem o que está no livro para aquilo que eles estão fazendo.*

Luciana: *Eles não associam com aquilo que eles já aprenderam.*

Luis: *Essa transposição de ver lá [no livro] a incógnita, e ver aqui [na tarefa em questão] a incógnita, para eles são coisas diferentes.*

José: *Mas eu achei que no primeiro ano [do EM], não saber o que é uma expressão e o que é uma equação?... Eles deveriam saber.*

Formador: *José, você está convidado para minhas primeiras aulas ano que vem no 1º ano da licenciatura, pra você ver o que dá.*

José: *A falha talvez seja nossa, de passar batido. A gente fala de função, construir o gráfico... Mas, às vezes, não "bate" na questão da variável, outros conceitos… É mais a coisa mecânica, construir o gráfico dela, vai dar uma reta, vai dar uma parábola, e assim por diante... Vamos para frente. Às vezes, a gente ensina mais a técnica e esquece um pouco o conceito, de explorar um pouco o conceito.*

Luciana:	*Mas mesmo o 9º ano, tendo visto no primeiro semestre, e a gente aplicou [a tarefa] quando? Em setembro?*
Luis:	*Eles só identificaram que não era de segundo grau, porque não tem expoente.*
Formadora:	*Eu acho que tem o nosso costume de, às vezes, não trabalhar... Mas a gente estava falando dos livros didáticos. Será que os livros, da forma como trazem, dão oportunidade para isso? Ou eles vão mais na técnica?*
Luis:	*Eu dei uma olhada no livro da 1ª série [do EM], lá no final, que tem alguma coisa com o GeoGebra, só no fim do livro. Isso na 1ª série, isso nem é comentado. Ele vai conhecer quando chegar na 1ª série alguma coisa que pode ajudar ele ali pra resolver. Aí, se ele souber escrever a expressão, ele vai ter uma resposta, se não, nem com ajuda ele vai conseguir. Os livros deixam bastante a desejar.*
	[Conversas]
Formador:	*Mas acho que nesse sentido, talvez… O José falou que essa tarefa foge do padrão. Mas quem estabelece o padrão?*
Luis:	*Normalmente, é o professor.*
Formador:	*Apoiado onde?*
Luis:	*No livro [didático].*
Luciana:	*Ou naquilo que ele consegue buscar fora do livro.*
José:	*E o pior é que até na internet você busca e não é fácil de achar.*
Luis:	*Fora do padrão é difícil de achar... Porque, mesmo nos vídeos que tem no YouTube, o cara explica igual a gente explica no quadro e às vezes até usa o quadro mesmo.*
Luciana:	*Porque, na verdade, a maioria desses vídeos é para quem tá fazendo vestibular, cursinho, essas coisas.*
Luis:	*Treinamento.*

(Encontro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

Enquanto o formador menciona a cultura dos alunos (ou o contrato didático) em relação à aprendizagem de Matemática, José utiliza a primeira pessoa, chamando a atenção de que existe igualmente uma cultura em relação ao ensino de Matemática, que influencia a forma como lidamos com a Matemática. Assim, as reflexões relacionadas às dificuldades que os alunos evidenciaram ao lidar com a tarefa, geraram certa frustração aos professores – particularmente, a Luis – e sugerem que elas podem estar diretamente relacionadas às experiências que alunos e professores têm nas aulas de Matemática. Isso dissemina uma cultura de matemática orientada à técnica, a qual, segundo os professores, é refletida nos livros didáticos e outros recursos a que recorrem (como vídeos on-line). Desta forma, realça-se que o conhecimento do professor, apesar de essencial, não é suficiente para uma mudança de prática pedagógica, porque ela sofre substancial influência de aspectos materiais e contextuais. Salienta-se, contudo, que essa percepção por parte dos professores somente emergiu no contexto das discussões do grupo, já que, ao realizarem a tarefa de forma isolada e solitária em suas salas de aula, o que suas falas revelam é decepção em relação às expectativas que criaram quanto ao desempenho dos alunos na tarefa – particularmente os professores Luis e José.

Destarte, os excertos anteriores e o próximo ilustram modos como diferentes componentes (materiais, matemáticos e didáticos) se entrelaçam e são interdependentes na prática e no desenvolvimento profissional de professores de Matemática. Isso ocorre durante as discussões realizadas, dando evidências da influência que a prática do professor sofre em relação aos recursos de que dispõe e as condições de trabalho que possui. Elas interferem, portanto, nos esquemas de uso dos recursos e se relaciona diretamente com a forma como a Matemática é abordada em sala de aula, e os excertos seguintes evidenciam o potencial de práticas semelhantes às relatadas para a aprendizagem de professores.

Formador: *O que vocês acharam dessa ideia de a gente discutir uma tarefa aqui, levar para os alunos e voltar?*

Luciana: *Bem interessante.*

Luis: *Boa ideia, até porque a gente socializa o que dá certo e o que não dá certo.*

Formador:	*E vocês acham que vale a pena, para o ano que vem, a gente continuar pensando em outras tarefas? E fazendo essas discussões...*
Luis:	*Eu acho que a gente poderia fazer isso por série.*
Formador:	*É uma ideia boa. Aí a gente chega no ano que vem e retoma no primeiro encontro para saber certinho quem está trabalhando com o quê. E podemos trabalhar com essa ideia.*
Luciana:	*Ou pelo menos algum conteúdo, assim, que a gente acha [interessante].*

(Encontro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

Gueudet e Trouche (2008) destacam que as experiências dos professores, ao trabalharem com diferentes recursos, é essencial para as decisões quanto à evolução dos recursos utilizados e dos documentos produzidos. A análise de tarefas, seguida da experienciação e discussão coletiva dos resultados, provoca reflexões que articulam componentes materiais, pedagógicas e matemáticas. Neste sentido, oferece elementos consistentes que funcionam como mote ao desenvolvimento profissional do professor e, portanto, demandam lentes teóricas coerentes para sua análise e interpretação. Deste modo, a reflexão colaborativa antes e após a prática contribuem para a evolução do conjunto de recursos de que dispõem, assim como explicita os condicionantes para os esquemas de uso que empregam, com respectivos sucessos e insucessos. Particularmente, permite avançar de esquemas ingênuos, que se baseiam essencialmente no caráter motivacional da tecnologia, para sua integração social e pedagogicamente intencionada, com justificativas maduras sobre o que conduz ao emprego de determinado recurso para determinada situação, ou o que compromete esse emprego e, possivelmente, aspectos que o inviabilizam, sejam de ordem material, pedagógica ou de conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As ações que temos realizado no contexto da Comunidade de Prática de Professores de Matemática (CoP-ReDAMat) têm sido orientadas por outros aportes teóricos e, neste contexto, cabe salientar que, quando da realização dos encontros e discussões aqui problematizados, não tínhamos ainda acesso à Gênese Documental. Deste modo, a articulação teórico-prática que aqui apresentamos consiste em um ensaio, em que buscamos identificar a aderência teórica da Gênese Documental para suportar análises sobre o desenvolvimento profissional de professores de Matemática em relação à integração da tecnologia em sua prática letiva.

Recorrendo a aspectos da Gênese Instrumental, é possível elencar elementos norteadores para analisar os esquemas utilizados pelos professores para que recursos se tornem documentos, a fim de identificar como um conjunto de recursos se modifica ao longo do tempo e das experiências, especialmente aquelas coletivas.

É grande, ainda, a dificuldade dos professores em modificarem sua prática pedagógica e superarem as aulas expositivas, desenvolvidas por meio de exemplos seguidos de exercícios. Como salientam Gueudet e Trouche (2008), a evolução dos recursos utilizados e dos documentos desenvolvidos por um professor precisa ser considerada em diferentes contextos e períodos de tempo, de forma que as experiências tidas em um ano letivo tenham grande importância em relação a como será realizada no ano seguinte. Assim, uma tarefa matemática organizada em sala de aula em um determinado ano gera recursos para outro ano, em que o professor encontra novamente o mesmo nível de classe. Ainda é necessário considerar que um tempo mais curto pode intervir, de modo que o ensino planejado para um determinado tópico pode ser modificado de acordo com o que aconteceu na aula. Períodos mais longos também podem trazer mudanças importantes, como reformas curriculares ou mudança de escola para o professor. Qualquer que seja a escala de tempo, a integração e apropriação de novos recursos é uma questão complexa.

Nossas experiências dentro da CoP emanam expressões de preocupação, tanto profissionais quanto pessoais, constituintes do mundo do professor, que resultam de suas experiências profissionais, sociais e pessoais, que constituem seus sistemas de documentação. Embora os três professores sejam profissionais da mesma rede de ensino, trabalhem com estudantes dos mesmos períodos de ensino e sigam as mesmas orientações curriculares, os alunos com os quais trabalham fazem parte de diferentes contextos, cada um com sua experiência, os quais interferem nas experiências profissionais destes professores. Essas experiências também são influenciadas pelas componentes de conteúdo (compreensão e concepção dos conteúdos matemáticos trabalhados), materiais (recursos físicos e materiais dos quais dispõem), didático (orientações curriculares, experiências com os colegas com os quais trabalham diretamente na escola, possibilidades de formação profissional a que têm oportunidade). Além disso, ainda há as pressões a que são submetidos pelas políticas de valorização profissional e salarial, e fatores sociais e pessoais que cada um possui e que envolvem uma enorme gama de fatores impossíveis de serem nomeados e enumerados aqui.

Sistemas de documentação de professores de matemática pautados nas características profissionais oferecem possibilidades para compreender, sob diferentes aspectos, as características dos professores, especialmente em relação a sua percepção da realidade que o cerca dentro de sua atividade profissional em um determinado contexto. A participação dos professores na CoP de forma voluntária evidencia seu comprometimento profissional em buscarem meios para superarem os desafios que a profissão lhes impõe, como frustrações pelos alunos não diferenciarem incógnita de variável ou expressão de equação, como relatado pelos professores nos encontros realizados para discutir a tarefa táxi. Além disso, as expressões dos professores permitem identificar como a tarefa táxi pode se integrar a outros recursos, das três diferentes componentes que devem ser consideradas para a análise de um recurso ou um documento, como o livro didático, documentos orientadores, materiais didáticos e pedagógicos, discussões com os colegas. Tudo isso compõe um conjunto de recursos que, a partir de esquemas de utilização estabelecidos pelos professores, constituir-se-ão um documento que pode, no futuro, integrar outro recurso em um curto período de tempo, mesmo quando não conseguirem desenvolvê-lo segundo planejado. Por exemplo, o professor José, que sem computadores para utilizar o *applet*, desenhou no quadro-negro o caminho do táxi, mas que foi conduzido a refazer a tarefa com alguns alunos utilizando computadores pouco tempo depois de tê-la realizado em sala.

Portanto, ao considerar a instrumentação como o modo pelo qual um conjunto de recursos interfere na atividade do professor, e a instrumentalização como a forma pela qual a atividade do professor interfere no uso de um conjunto de recursos, identificamos os seguintes elementos como aqueles mínimos a serem levados em investigações envolvendo a integração de tecnologia na prática dos professores e seu desenvolvimento profissional: i) as crenças profissionais do professor (que o aluno conseguirá diferenciar equação e expressão apenas observando exemplos); ii) a dinâmica produtiva do trabalho do professor (ampliação do tempo de preparo e menos exposição nas aulas); iii) a dimensão construtiva, o design e a execução de uma aula (provocar mais o aluno para que ele busque soluções para tarefas não cotidianas); ainda, iv) a evolução na prática do professor, identificando as razões que os fazem utilizar ou não componentes materiais, didática e de conteúdo; e v) a relação com a realidade específica e os condicionantes de cada professor.

REFERÊNCIAS

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Conhecimento tecnológico e pedagógico de matemática revelado por professores quando relatam suas práticas. *Revista de Educação, Ciências e Matemática Amazônia* - Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática, v.14, n. 31, 2018a.

BASNIAK, M. I; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. *Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,* p. 13-25, 2018b.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma Lente Teórica para analisar o potencial das Tecnologias Digitais no Ensino Exploratório de Matemática. *Actas Latinoamerica de Matematica Educativa,* v. 2, p. 738, 2019.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des outils informatiques: le problème de l'ingénierie didactique. In : CORNU, B. (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques.* Paris: PUF, 1992.

ESTEVAM, E. J. G. Comunidades de Prática como arcabouço teórico para a formação de professores e pesquisas sobre a aprendizagem profissional docente. In : CYRINO, M. C. C. T.; DE PAULA, E. F.; RODRIGUES, P. H. *Estudos e Pesquisas sobre a Formação de Professores que ensinam Matemática.* No prelo.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Condicionantes de aprendizagens de professores que ensinam matemática em contextos de comunidades de prática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,* Florianópolis, v. 12, n. 1, p. 227-253, maio 2019.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. *Towards new documentation systems for mathematics teachers?* Educational Studies in Mathematics, 2009, 199–218.

GUEUDET, G.; PEPIN, B.; TROUCHE, L. *Collective work with resources: an essential dimension for teacher documentation.* ZDM Mathematics Education, 2013, p. 1003–1016.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, v. 9, n. 1, p. 60-70, 2009.

LIMA, L. R.; GERONÇO, S.; BASNIAK, M. I.; MARCZAL, C. Tarefa 1 – Introdução às equações. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. G. E. (Org.) *O GeoGebra e a matemática da educação básica:* números inteiros, equações, matemática financeira, ângulos e razões trigonométricas. 1.ed. – Curitiba: Íthala, 2017. 76p.

MISHRA, P.; KOELHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record,* v. 6, 2006, p. 1017– 1054, 2006.

MONAGHAN, J.; TROUCHE, L. Mathematics Teachers and Digital Tools. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. *Tools and Mathematics:* Instruments for learning. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

NIESS, M. L.; RONAU, R. N.; SHAFER, K. G., DRISKELL, S. O.; HARPER S. R.; JOHNSTON, C.; BROWNING, C.; ÖZGÜN-KOCA, S. A.; KERSAINT, G. Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, v. 9, n. 1, p. 4-24, 2009.

PALIS, G. L R. O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa,* v. 12, n. 3, p. 432-451, 2010.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares para a Educação Básica* – Matemática, 2008.

PONTE, J. P. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Educação e Matemática,* n. 31, p. 9-20, 1994.

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies:* approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P. *Los hombres y las tecnologías:* Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Trad. por M. Acosta. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

WENGER, E. C. *Communities of practice:* learning, meaning, and identity. Cambridge: University Press, 1998.

4

Humberto José Bortolossi

MOVIMENTOS, PENSAMENTOS E GEOGEBRA:

ALGUNS ASPECTOS NEUROCIENTÍFICOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.96-117

INTRODUÇÃO

O GeoGebra é conhecido por ser um *software* de matemática dinâmica. Aqui, a palavra *dinâmica* refere-se à capacidade do aplicativo em trazer movimento às construções: por exemplo, diferentemente do que ocorre com régua e compasso usuais, ao mover os elementos geométricos da construção, as relações geométricas entre esses elementos são mantidas (pertinência, paralelismo, perpendicularidade, etc.), gerando, assim, uma variedade de exemplos de uma mesma situação geométrica.

A literatura tem apontado para as muitas vantagens desse dinamismo: o combate aos efeitos de configurações prototípicas (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019); a descoberta e o entendimento de invariantes geométricos estabelecendo uma cadeia de raciocínios com argumentação lógica e dedutiva (GRAVINA, 1996); e a compreensão do pensamento funcional e da dependência e variação de parâmetros por meio da construção de cenários animados e simulações (BASNIAK, 2019).

Nosso objetivo, neste trabalho, é apontar para outra perspectiva sobre o importante papel que o movimento desempenha, por meio do dinamismo, no contexto de ensino e aprendizagem: a perspectiva da Neurociência e da Psicologia. Para isso, apresentamos alguns resultados dos trabalhos de Pawan Sinha (professor de visão e neurociência computacional no Departamento de Ciências Cerebrais e Cognitivas do MIT nos EUA) e de Barbara Tversky (especialista em Psicologia cognitiva, professora emérita de Psicologia na Stanford University e professora de Psicologia e educação na Teachers College, Columbia University, nos EUA). Finalizamos com a indicação de duas atividades com o GeoGebra que temos desenvolvido com suporte nas teorias apresentadas em uma disciplina da Licenciatura em

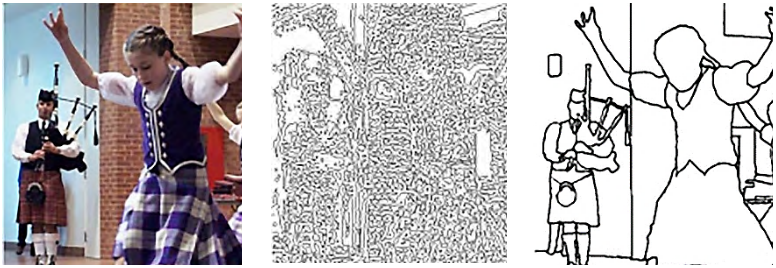
Matemática da Universidade Federal Fluminense: geometria espacial com realidade aumentada em *smartphones* e *tablets* e engenharia reversa em animações matemáticas artísticas.

PAWAN SINHA E COMO O CÉREBRO APRENDE A VER

Em uma palestra no Massachusetts Institute of Technology (MIT) em 2007, Pawan Sinha nos conta sobre a situação das pessoas cegas na Índia: 1 em cada 100 indianos é cego e existem mais de 1 milhão de crianças indianas cegas, e 60% desses casos poderiam ser evitados ou tratados, mas apenas 20% o são. Por que não ocorre o tratamento? Existem vários motivos: menos que 10% dos hospitais têm uma unidade pediátrica; os oftalmologistas pediátricos concentram-se nas grandes cidades (Nova Déli, sozinha, concentra 12% de todos os oftalmologistas da Índia); 75% das pessoas cegas da Índia vivem em vilarejos e a maioria não tem dinheiro para o tratamento. Outro motivo é o seguinte: existia a crença de que uma criança, depois de 4 ou 5 anos de nascença, passaria do seu período crítico visual, isto é, *não poderia mais aprender a ver.*

Aqui, *ver* significa identificar formas geométricas 2D e 3D independentemente de posição e da escala, determinar quais objetos estão mais próximos e quais estão mais distantes, identificar cores, reconhecer faces, identificar para onde uma pessoa está olhando, entre outras situações. Quem já aprendeu a ver desde nascença, pode não perceber o quão complexo este processo pode ser. Imagine-se adquirindo a visão depois de adulto e olhando uma imagem como a da Figura 1 (A). Como decodificar toda a informação visual de cor e luminância para saber onde um objeto termina e outro começa? Em particular, como identificar contornos (segmentação) e fazer uma integração visual de forma a ter informações semânticas sobre os objetos da cena como na Figura 1 (C) e não como na Figura 1 (B)?

Figura 1 – Segmentação/integração visual de uma imagem



(A) *(B)* *(C)*

Fonte: Ostrovsky *et al.* (2009, p. 1485).

O pressuposto de que pessoas com cegueira congênita não poderiam aprender a ver depois de 4 ou 5 anos surgiu dos trabalhos dos neurofisiologistas David H. Hubel (1926-2013) e Torsten Nils Wiesel (1924-), que identificaram a existência de um *período crítico visual* em filhotes de gato. Esses investigadores, por meio de experimentos, averiguaram que, se o olho de um filhote de gato recém-nascido fosse tapado no período entre o décimo quarto e o trigésimo dia, de modo que apenas um lado do córtex visual recebesse estimulação visual, o animal ficaria permanentemente cego desse olho. Contudo, se esse mesmo olho fosse fechado um mês após o nascimento, nenhuma mudança ocorreria no cérebro e a visão do gato voltaria ao normal após a retirada do tampão no olho. Hubel e Torsten ganharam um Prêmio Nobel em 1981 por seus estudos sobre períodos críticos no desenvolvimento visual de mamíferos.

Pawan Sinha (2009), contudo, acreditando que a extrapolação para seres humanos dos resultados sobre períodos críticos obtidos com filhotes de gato não foi devidamente testada, concebeu o Projeto

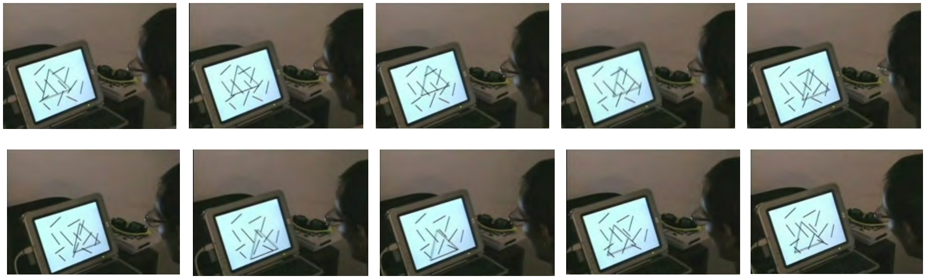
Prakash (https://www.projectprakash.org/). O objetivo do projeto (entre outros) é o de ensinar cegos congênitos (com catarata congênita, por exemplo), a verem depois de operados. Sinha desenvolveu um esquema de tratamento de 40 semanas que, de fato, gerava a capacidade de ver em crianças, adolescentes e adultos com cegueira congênita. Segundo o pesquisador, um dos elementos centrais do tratamento é o *movimento*: "A única coisa que o sistema visual precisa para começar a analisar o mundo é informação dinâmica" (SINHA, 2009). As Figuras 2 e 3 ilustram um experimento em que a questão do movimento aparece na identificação de objetos.

Figura 2 – Dificuldade de identificar um triângulo equilátero em uma imagem estática

Fonte: Sinha (2009 – vídeo).

Na Figura 2, a imagem exibida na tela do computador é estática. Você deve ter identificado o triângulo equilátero nela. O indiano, que também observa a cena estática e que ganhou a visão depois de adulto, não consegue. Contudo, quando o triângulo equilátero é posto em movimento (Figura 3), o indiano consegue identificá-lo. No intervalo (11:14-11:54) de Sinha (2009), é possível encontrar este e um outro exemplo.

Figura 3 – O movimento permite identificar um triângulo equilátero em uma animação



Fonte: Sinha (2009 – vídeo).

Assim, Pawan Sinha conseguiu demonstrar, com seu Projeto Prakash (1), que o período crítico visual descoberto em filhotes de gato não se aplica a humanos, pois estes possuem uma plasticidade visual (isto é, capacidade de adaptação do aparato visual do cérebro) que lhes ajuda na aprendizagem visual, e (2) que o movimento é fundamental nessa aprendizagem.

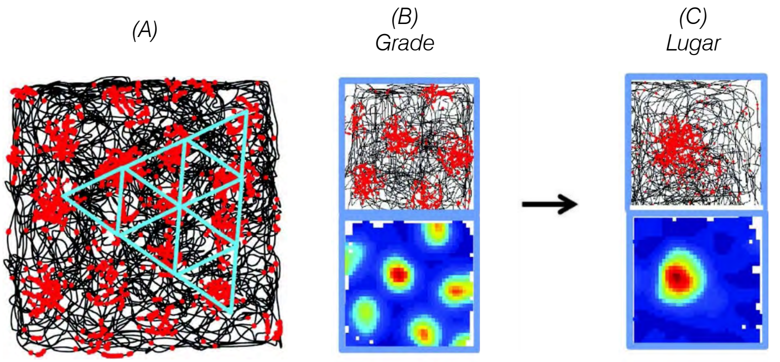
A pesquisa de Sinha teve desdobramentos: a descoberta de que ilusões de ótica, como a de Ponzo e de Müller-Lyer (https://bit.ly/2B8H3bc), não são culturalmente construídas, mas parecem ser inatas (CHATTERJEE, 2015), e que uma das características do autismo seria a dificuldade de predição de movimentos (SINHA *et al*., 2014).

Para encerrar esta seção, colocamos uma metáfora para reflexão: as pessoas aqui descritas são especiais, elas são como singularidades de um campo vetorial. Como a teoria de sistemas dinâmicos bem nos ensina, o que aprendemos com as singularidades nos diz muito sobre os demais pontos (regulares). O estudo e descoberta de esquemas que são essenciais para as pessoas especiais também se mostram muito úteis para as demais pessoas. Movimento é um destes esquemas.

BARBARA TVERSKY, MAPAS COGNITIVOS E OS PENSAMENTOS ESPACIAL E ABSTRATO

Na Figura 4, o rabisco preto descreve o movimento de um rato locomovendo-se em uma caixa de base quadrada (as imagens exibem a trajetória do rato quando a caixa é vista de cima). Eletrodos foram implantados em neurônios do hipocampo e do córtex entorrinal dos ratos de forma a acompanhar sua atividade durante o experimento. Em 1971, os neurocientistas John O'Keefe e John Dostrovsky descobriam que células do hipocampo disparavam (emitiam um sinal elétrico mais frequente) quando o rato estava em determinados lugares que já conhecia (Figura 4 (C)), como o centro da caixa ou em uma posição onde se havia colocado alguma marca, como o desenho de uma estrela. Esses neurônios foram denominados de *células de lugar* (*place cells*, em inglês). A descoberta mostrou que, em ratos, o hipocampo contém um tipo de mapa cognitivo do ambiente espacial onde o animal se locomove. Segundo Kandel *et al.* (2014), essa foi a primeira evidência para uma representação neural do ambiente, que permite que o animal se mova de forma deliberada por ele.

Figura 4 – O movimento permite identificar um triângulo equilátero em uma animação



Fonte: Adaptado de Moser, Rowland e Moser (2015, p. 3).

Segundo Bear, Connors e Paradiso (2017), não se sabe se existem ou não células de lugar no encéfalo humano. Contudo, estudos utilizando tomografia por emissão de pósitrons - TEP revelaram que o hipocampo humano é ativado por situações que envolvam navegação virtual ou imaginária através do ambiente. Os autores também mencionam um estudo feito com motoristas de táxi em Londres que, para conseguirem uma licença, precisam passar em um teste rigoroso. Londres possui vários pontos de interesse distribuídos em suas quase 25 mil ruas. Em comparação com um grupo de controle, os motoristas de táxi mostraram possuir um hipocampo posterior maior e um hipocampo anterior menor, havendo uma correlação entre o tamanho do hipocampo posterior e o tempo de experiência do motorista de táxi.

May-Britt Moser, Edvard I. Moser e John O'Keefe, prêmios Nobel de Medicina de 2014, junto com colaboradores, descobriram outro tipo de célula, as *células de grade* (*grid cells,* em inglês), que também mapeiam o espaço, mas de uma forma diferente. Localizadas no córtex entorrinal, as células de grade disparam sempre que o animal estiver em qualquer um dos nós de uma malha triangular, como nas Figuras 4 (A) e (B) (na comunidade de neurociência, a malha é vista como hexagonal). Esse sistema de referência permite uma localização que é independente de marcas específicas, de sinais do ambiente e do contexto, sendo, portanto, alocêntrica (e não egocêntrica). A fronteira da malha corresponde à fronteira natural do ambiente sendo explorado. Quando um novo local é explorado, a malha pode ser recalibrada, reorientada e, portanto, adaptada à nova situação.

O fato surpreendente é que, como mostram medidas indiretas da atividade neural e experimentos com voluntários com tarefas especialmente concebidas (por exemplo, lembrar os itens de uma lista que foi memorizada), as células de lugar e de grade mostram ter outras funcionalidades, além de servir como mapa cognitivo espacial advindo da necessidade evolutiva de movimento e ação para a sobrevivência da espécie. Segundo Tversky (2019), células de lugar também disparam com eventos, pessoas e ideias, e a malha das células de grade é usada para operar com informações conceituais, temporais e sociais. Desse modo, o pensamento espacial e o movimento associado a este tipo de pensamento são a fundação (mas não todo edifício) dos demais tipos de pensamento: mapas espaciais são usados como mapas conceituais que permitem o pensamento abstrato. Assim como nossos pés se movem de um lugar para outro por caminhos espaciais, nossas mentes se movem de pensamento em pensamento por caminhos conceituais. Espacial, aqui, não significa geométrico ou analítico, mas algo como um grafo topológico: o que está ligado ao quê. Tversky (2019) dá o exemplo da boca como outro exemplo de estruturas que evolvem para ganhar novas funcionalidades: sua função primária é da alimentação, mas a usamos para falar, assobiar, tocar flauta e beijar.

Sendo fundação, é importante observar que características e limitações do mapa espacial podem ter implicações para os mapas conceituais nele baseado. Por exemplo, é reconhecida a distorção existente no julgamento de distâncias: somos mais precisos com coisas mais próximas e menos precisos com pontos de referência mais distantes. Há uma distorção semelhante em julgamentos de dimensão social: as pessoas costumam julgar pessoas mais próximas do seu convívio social de forma diferente de membros de outros grupos sociais mais distantes. Outro exemplo: no que se refere ao tempo, eventos distantes no passado são, em geral, considerados próximos um do outro, mas eventos mais recentes, próximos de nós, são considerados mais separados. Em termos de número, discriminar grandes quantidades é mais difícil do que discriminar pequenas quantidades (Lei de Weber-Fechner).

Como observa Tversky (2019), apesar de incompletos, ambíguos, inconsistentes e enviesados, esses aparatos espaciais mentais desempenham papel fundamental em nossas vidas e em nossas imaginações: eles permitem vislumbrar outros mundos, mundos que ainda não foram vistos, e mesmo mundos impossíveis – mundos da ficção, da arte e da ciência.

UM EXEMPLO DO PODER DO MOVIMENTO: O EFEITO MCGURK

Algumas partes do cérebro reagem especificamente a estímulos relacionados com movimento, como o córtex temporal medial e o córtex temporal medial superior. Mesmo fotos estáticas de objetos em movimento (como um jogador de basquete arremessando uma bola) ativam essas regiões, enquanto fotos de poses paradas não.

Um exemplo clássico que demonstra como o movimento influencia o cérebro é o assim conhecido Efeito McGurk. Assista ao vídeo disponível em https://youtu.be/CE-I6UqYR78. É importante que você mantenha os seus olhos na boca do apresentador. O que ele está falando: "ba", "da", "fa", "pa" ou "ga"? Volte ao início do vídeo e, agora, de olhos fechados, tente identificar o que ele está falando: "ba", "da", "fa", "pa" ou "ga"? A resposta foi a mesma nos dois casos? Durante todo o vídeo, o apresentador está falando "ba" mas, no início (quando ele está à esquerda da tela), houve uma edição da imagem e os movimentos labiais são de "pa". Os movimentos dos lábios influenciam e modificam a interpretação do que você está ouvindo!

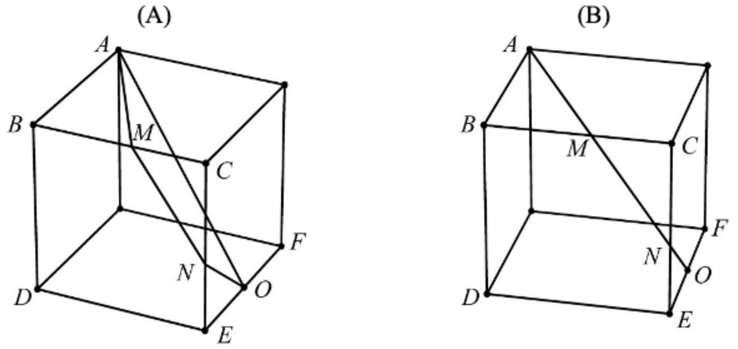
Este tipo de fenômeno foi primeiramente descrito em 1976 pelos psicólogos Harry McGurk e John MacDonald na revista Nature, com o artigo *Hearing Lips and Seeing Voices* (Ouvir Lábios e Ver Vozes). O efeito é resistente: ter consciência do efeito não o elimina.

Indivíduos disléxicos exibem um Efeito McGurk menor do que os leitores normais da mesma idade cronológica, mas exibem o mesmo grau de intensidade que os leitores pareados por nível de leitura. Certas condições diminuem o Efeito McGurk: distúrbios do espectro do autismo, Doença de Alzheimer, esquizofrenia e afasia. A intensidade do Efeito McGurk pode mudar entre os idiomas: ouvintes nos idiomas holandês, inglês, espanhol, alemão, italiano e turco experimentam um efeito robusto de McGurk, enquanto ele é mais fraco para ouvintes japoneses e chineses. Mulheres mostram um Efeito McGurk mais pronunciado do que homens.

MOVIMENTOS, PENSAMENTOS E GEOGEBRA: GEOMETRIA ESPACIAL COM REALIDADE AUMENTADA EM *SMARTPHONES* E *TABLETS*

No que se refere à Geometria Espacial, uma das dificuldades que os alunos enfrentam é a tarefa de reconstruir mentalmente uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa na página de um livro ou desenhada no quadro negro pelo professor. Como a Geometria Projetiva bem nos ensina, esse tipo de procedimento dá margem à ambiguidade, pois dois objetos diferentes podem ter uma mesma projeção plana (VOLKERT, 2008). Por exemplo, no cubo (A) na figura a seguir, se *M, N* e *O* são os pontos médios das arestas *BC, CE* e *EF* respectivamente, então o segmento *AO* e o caminho poligonal formado pela justaposição dos segmentos *AM, MN* e *NO*, quando vistos de uma posição específica, possuem a mesma projeção, a saber, o desenho em (B).

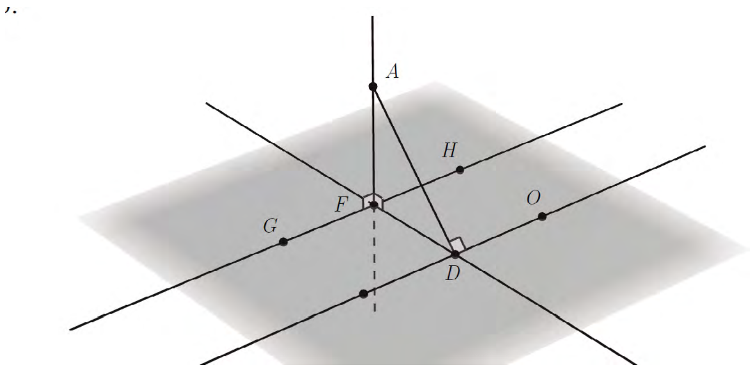
Figura 5 – Um exemplo de ambiguidade em projeção em perspectiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro complicador das representações 2D de objetos 3D: ângulos frequentemente aparecem deformados. Considere, por exemplo, a figura a seguir. Os ângulos *AFG, AFD* e *ADO* na configuração 3D são todos retos, mas na representação 2D correspondente, obtida por uma projeção em perspectiva, eles não são.

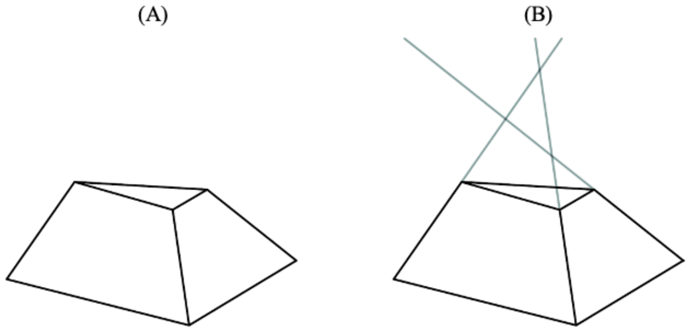
Figura 6 – Deformação de ângulos em uma projeção em perspectiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais ainda: existem representações 2D de objetos 3D que, em um primeiro momento, podem parecer adequadas, mas, de fato, não o são. Um exemplo clássico é a Pirâmide de Huffman (HUFFMAN, 1977). O desenho em (A) na figura a seguir parece ser a representação de um tronco de pirâmide de base triangular, mas, como mostra o desenho em (B), este não é o caso.

Figura 7 – A Pirâmide de Huffman

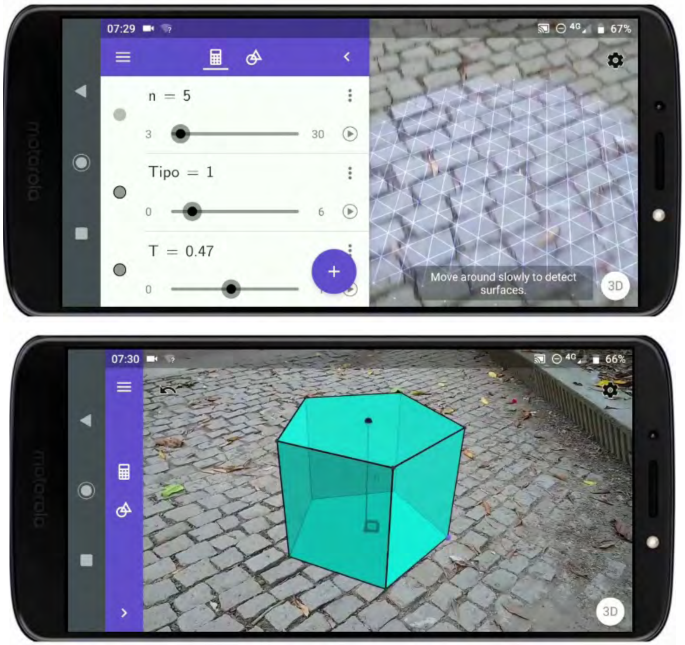


Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos estes exemplos mostram que, para melhor entender um objeto tridimensional, é necessário observá-lo de várias posições diferentes. Certamente o uso de materiais concretos é um recurso didático indispensável, principalmente nas séries iniciais. Por outro lado, existem certas configurações e propriedades geométricas que são difíceis de representar concretamente, devido a limitações de ordem técnica. Aliados ao fascínio que exercem sobre os alunos, o computador, o *tablet*, o *smartphone* e softwares como o GeoGebra colocam-se, então, como ferramentas promissoras para o ensino da Geometria Espacial. Este potencial se amplifica com recursos como o de Realidade Aumentada.

Nas versões mais recentes do GeoGebra para *tablets* e *smartphones*, construções feitas na Janela 3D podem ser projetadas em superfícies planas em realidade aumentada: ativa-se o modo AR (realidade aumentada), aponta-se a câmera do dispositivo para uma superfície, caminha-se para que a superfície seja detectada (uma malha triangular aparecerá), toca-se na tela para iniciar a projeção em realidade aumentada (Figura 8). Observamos que a tecnologia implementada no GeoGebra Realidade Aumentada dispensa o uso de cartões ou páginas impressas, bastando o dispositivo.

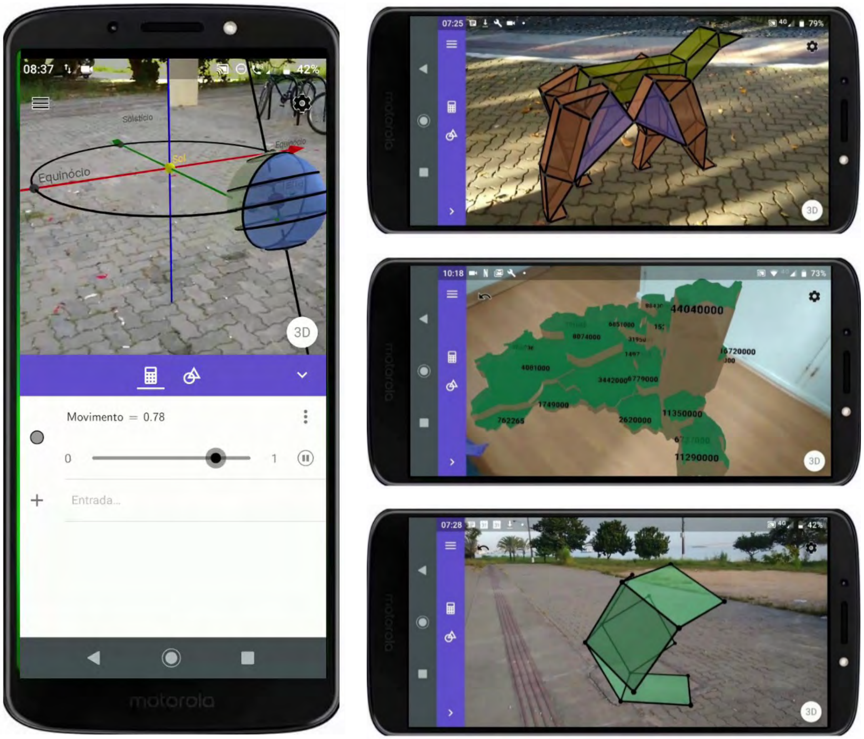
Figura 8 – Realidade Aumentada com o GeoGebra em um celular



Fonte: Acervo do autor (2019 – https://youtu.be/l2B-RS6xrvg).

Uma vez projetado o objeto 3D, o usuário pode ampliá-lo, diminuí-lo e girá-lo; caminhar em volta e por dentro dele; modificar elementos livres, semilivres e parâmetros; realizar construções geométricas diretamente na projeção; mudar a aparência dos objetos (cor, espessura, etc.); realizar medidas; tudo em tempo real (TRAPPMAIR; HOHENWARTER, 2019). Vários exemplos de construções com o GeoGebra Realidade Aumentada estão disponíveis nesta *playlist* do YouTube: https://bit.ly/2Yca39v.

Figura 9 – Exemplos de construções com o GeoGebra Realidade Aumentada



Fonte: Acervo do autor (2019 – https://bit.ly/2Yca39v).

Mas quais seriam as vantagens da Realidade Aumentada frente ao modo tradicional da Janela 3D do GeoGebra? Além dos exercícios de modelagem, isto é, construir modelos matemáticos 3D que se sobrepõem aos objetos do mudo real como recipientes e embalagens (TRAPPMAIR; HOHENWATER, 2019), gostaríamos de apontar que a tecnologia de Realidade Aumentada permite outro tipo de movimento: aquele do corpo do próprio usuário ao interagir com a cena e visualizá-la de posições e ângulos de enquadramentos diferentes. Na Janela 3D tradicional, o usuário fica sentado em uma cadeira e movimenta a cena na tela do dispositivo. No modo de Realidade Aumentada, o próprio usuário tem que se movimentar pela cena.

A importância dos gestos e do corpo na comunicação e na cognição tem sido apontada por várias referências: Clark (1998), Lakoff e Nuñez (2001), Wilson (2002), Gallagher (2006), Alibali e Nathan (2011), Edwards, Ferrara e Moore-Russo (2014), Freitas e Sinclair (2014), Krause (2015) e Pfeifer e Bongard (2019).

Tversky (2019) relata vários experimentos que evidenciam o papel dos gestos no pensamento, no Capítulo Cinco de sua obra. Em um deles, participantes deveriam descrever oralmente relações espaciais (por exemplo, relatar como ir de casa para o trabalho). Aqueles que estavam sentados sobre suas mãos (impedidos, então, de movimentá-las) mostraram dificuldades em encontrar palavras para fazer a descrição. O ato de inibir o movimento faz mais do que dificultar a fala, ele dificulta o pensamento. Mesmo pessoas cegas de nascença, jovens e adultos, que nunca viram outras pessoas gesticulando, também usam gestos para se comunicarem. Segundo Tversky (2019), gestos nos ajudam a falar, pensar, mudar os pensamentos dos outros, fazer matemática e música e promover interações sociais.

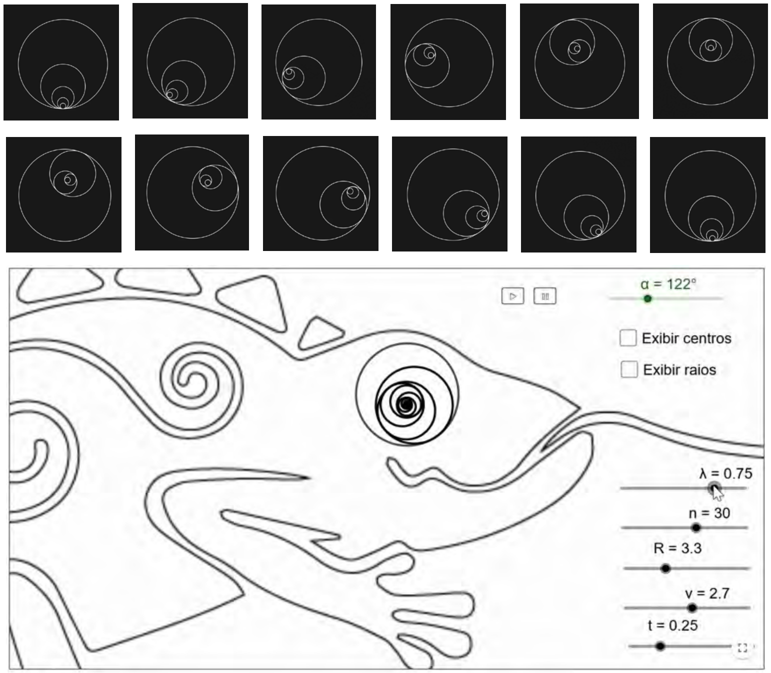
Neste contexto, ao conceber e interagir com construções tridimensionais no módulo de Realidade Aumentada do GeoGebra, corpos e mentes dos alunos, de forma entrelaçada, apreendem estruturas do espaço que são a base para os outros tipos de pensamentos.

MOVIMENTOS, PENSAMENTOS E GEOGEBRA: ENGENHARIA REVERSA EM ANIMAÇÕES MATEMÁTICAS ARTÍSTICAS

Nos grupos e perfis relacionados com Matemática das mídias sociais, é comum encontrar pequenas animações artísticas com motivação matemática. Uma busca pelas *hashtags* seguintes pode dar uma amostra deste gênero artístico: #mathart, #geometric e #animation, #codeart, #proceduralart, #generativeart, #algorithmicart. Tal tipo de atividade se enquadra na educação STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics), uma abordagem que procura promover a aprendizagem de forma interdisciplinar e holística, integrando as disciplinas de Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática estimulando o engajamento, a experimentação, a criatividade, a inovação, a curiosidade, a investigação, a colaboração, a resolução de problemas, o uso e a validação de modelos (KHINE; AREEPATTAMANNIL, 2019).

Como um dos trabalhos desenvolvidos na disciplina de *Novas Tecnologias no Ensino da Matemática* para a licenciatura presencial em Matemática da Universidade Federal Fluminense, os licenciandos devem se dividir em grupos e cada grupo se responsabiliza por uma animação artística. O desafio proposto é o de reconstruir a animação no GeoGebra. A Figura 9 exibe um exemplo com 12 quadros da animação artística e sua reconstrução no GeoGebra. Dado que a animação dos círculos encaixados lembrava o olho de um camaleão, incluiu-se na construção do GeoGebra um desenho do animal. Outros exemplos podem ser encontrados aqui: https://bit.ly/2XEGvlv.

Figura 10 – Um exemplo de animação artística: círculos girando dentro de círculos



Fonte: Elaborada pelo autor (2019 – https://www.geogebra.org/m/behy9tau).

A realização da tarefa para cada animação requer uma primeira etapa de engenharia reversa em uma abordagem *top-down* de análise e decomposição (como o movimento do todo pode ser descrito em termos elementares?) seguida de uma síntese e reconstrução em uma abordagem *bottom-up* a partir dos recursos e do poder de expressão que as ferramentas do GeoGebra oferecem. Para a primeira parte, no processo de análise, frequentemente os alunos usam o recurso de incluir imagens de fundo no GeoGebra para fazer medições em alguns frames da animação original. Há também o serviço https://ezgif.com/speed, que permite modificar a velocidade de animação (tornála mais lenta ajuda muito). Cabe lembrar que, na segunda etapa, os alunos precisam articular vários objetos matemáticos sinteticamente e analiticamente, com especial destaque para as transformações geométricas. Em termos de produção de animação, a estrutura básica normalmente é a interpolação linear

$$P(t) = (1 - t)\,A + t\,B, \quad t \in [0, 1].$$

que leva A em tempo $t = 0$ em B em tempo $t = 1$ por meio de um controle deslizante do GeoGebra. Aqui, A e B podem ser pontos, funções, matrizes (que codificam transformações), ou seja, elementos de um espaço vetorial. Nesta segunda etapa ocorre, também, um processo de generalização: enquanto os componentes da animação original estão fixos, no GeoGebra é possível incluir parâmetros que podem modificar a animação. No caso da Figura 9, os parâmetros incluem o número de círculos usados (n), o fator de homotetia entre círculos consecutivos (λ), a velocidade (v), além da possibilidade de exibir elementos auxiliares (centros e raios dos círculos).

Observamos que, dadas suas características, este tipo de atividade se alinha com os aspectos de reconhecimento de padrões, decomposição, algoritmos e abstração do Pensamento Computacional (https://curriculo.cieb.net.br/), agora considerado na Base Nacional Comum Curricular - BNCC para a Escola Básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das tarefas do pesquisador em educação é tornar explícito aquilo que fica invisível na prática da sala de aula. Enquanto o movimento aparece nas construções dinâmicas do GeoGebra, nas brincadeiras em sala de aula, nos gestos de professores e alunos, o porquê de fazer o que se faz (e talvez sem ter consciência disso) pode passar desapercebido. Neste texto, procuramos trazer lentes teóricas da Psicologia e da Neurociência para o importante papel que o movimento tem no ensino, na aprendizagem e em nossas vidas de um modo geral.

Gostaríamos de finalizar este texto apontando para a questão da integração da Psicologia e da Neurociência com a Educação Matemática: muito se tem produzido recentemente em Psicologia e Neurociência, principalmente no que se refere aos anos iniciais das crianças, mas estas pesquisas e seus resultados parecem não alcançar as licenciaturas nas universidades e nem a Escola Básica. Enquanto a Educação Matemática parece focar em questões de “software”, precisamos aprender com as equipes que tratam de “hardware”. Felizmente, já começam a aparecer trabalhos sistematizados desta integração, como o livro de Norton e Alibali (2019). Certamente precisamos de mais iniciativas como esta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Carlos Tomei, Carmen Mathias, Cydara Cavedon Ripoll, Diego Lieban, Fabio Simas, Letícia Rangel, Rita de Cássia Silva Costa, Rodrigo Pessanha da Cunha, Edilson José Curvello Machado por se disporem a ler, revisar e criticar o texto original.

REFERÊNCIAS

ALIBALI, M. W. A.; NATHAN, M. J. Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners’ and Teachers’ Gestures. *Journal of the Learning Sciences*, v. 21, n. 2, p. 247-286, 2011.

BASNIAK, M. I. *A Construção de Cenários Animados no GeoGebra e O Ensino e A Aprendizagem de Funções*. Comunidad GeoGebra Latinoamericana, 2019. Disponível em: https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ. Acesso em: 28 fev. 2020.

BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A. *Neurociências: Desvendando O Sistema Nervoso*. Quarta edição. Porto Alegre: Artmed, 2017.

CHATTERJEE, R. Feature: Giving Blind People Sight Illuminates the Brain's Secrets. *Science*, AAAS, Oct. 22, 2015.

CLARK, A. *Being There: Putting Brain, Body, and World Together Again*. MIT Press, 1998.

EDWARDS, L. D.; FERRARA, F.; MOORE-RUSSO, D. *Emerging Perspectives On Gesture and Embodiment in Mathematics*. Information Age Publishing, Inc., 2014.

FREITAS, E. de; SINCLAIR, N. *Mathematics and The Body: Material Entanglements in The Classroom*. Cambridge University Press, 2014.

GALLAGHER, S. *How The Body Shapes The Mind.* Oxford University Press, 2006.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria. *Anais* do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996. Disponível em: https://goo.gl/djQ7YJ. Acesso em: 8 maio 2015.

HUFFMAN, D. A. Realizable Configurations of Lines in Pictures of Polyhedra. Em: ELCOCK, E. W.; MICHIE, D. (Eds.). *Machine Intelligence 8,* Ellis Horwood, England, p. 493-509, 1977.

KANDEL, E. SCHWARTZ, J.; JESSEL, T. M.; SIEGELBAUM, S. A.; HUDSPETH, A. J. *Princípios de Neurociências*. 5ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

KHINE, M. S; AREEPATTAMANNIL, S. *STEAM Education: Theory and Practice*. Springer-Verlag, 2019.

KRAUSE, Christina M. The Mathematics in Our Hands: How Gestures Contribute To Constructing Mathematical Knowledge. Springer-Verla, 2015.

LAKOFF, G.; NUÑEZ, R. *Where Mathematics Come From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books, 2001.

MACHADO, E. J. C.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. V. *Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Disponível em: http://bit.ly/2I5sLru. Acesso em: 28 fev. 2020.

MOSER, M-B.; ROWLAND, D. C.; MOSER Edvard I. Place Cells, Grid Cells, and Memory. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology*, v. 7, n. 2, a021808, p. 1-15, 2015.

NORTON, A.; ALIBALI, M. W. *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education*. Research in Mathematics Education, Springer-Verlag, 2019.

OSTROVSKY, Y.; MEYERS, E. GANESH, S. MATHUR, U. SINHA, P. Visual Parsing After Recovery From Blindness. *Psychological Science*, v. 20, n. 12, p. 1484-1491, 2009.

PFEIFER, R; BONGARD, J. *How The Body Shapes The Way We Think: A New View of Intelligence*. MIT Press, 2019.

SINHA, P. *Learning To See in Late Childhood*. MIT Club of Northern California, 2007. Disponível em: https://vimeo.com/384059. Acesso em: 29 fev. 2020.

SINHA, Pawan. *Pawan Sinha em como O Cérebro Aprender A Ver.* Palestra TED, 2009. Disponível em: http://bit.ly/32AGv7c. Acesso em: 29 fev. 2020.

SINHA, P.; KJELGAARD, M. M; GANDHI, T. K.; TSOURIDES, K.; CARDINAUXA, A. L.; PANTAZISA, D.; DIAMONDA, S. P.; HELDA, R. M. Autism as A Disorder of Prediction. *PNAS*, v. 111, n. 42, p. 15220-15225, 2014.

TRAPPMAIR, A.; HOHENWARTER, M. *Driving Augmented Reality: GeoGebra's New AR Features in Teaching Mathematics.* Proceedings of The 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14: Essen, Germany, 22nd to 25th of July, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3eP1NTA. Acesso em: 3 jun. 2020.

TVERSKY, B. *Mind in Motion: How Action Shapes Thought.* Basic Books, 2019.

VOLKERT, K. *The Problem of Solid Geometry.* Universität Wuppertal, 2008.

WILSON, M. Six Views of Embodied Cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, v. 9, n. 4, p. 625-636, 2002.

5

Sergio Rubio-Pizzorno

Gisela Montiel Espinosa

ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.118-157

INTRODUÇÃO: UMA MUDANÇA ALÉM DO TECNOLÓGICO

É inegável que a tecnologia digital tem provocado grandes mudanças, ou uma verdadeira revolução, em diferentes âmbitos da vida pessoal, laboral e social. Castells (1999) começa seu livro *A era da Informação (La Era de la Información)* afirmando que a revolução da tecnologia da informação[14] penetrou todos âmbitos da atividade humana, para em seguida acrescentar que esta revolução "está modificando a base material da sociedade em ritmo acelerado" (CASTELLS, 1999, p. 27). Por sua vez, Serres (2013) situa a revolução das novas tecnologias como uma das três revoluções principais na história da humanidade, após a criação da escrita e da invenção da imprensa, e reconhece que esta terceira revolução modificou, entre outras coisas, a maneira como a sociedade se articula e como se entende a educação. Cobo e Moravec (2011) caracterizam a mudança social na raiz desta revolução, descrevendo a transição entre paradigmas sociais, a partir do que eles chamam de sociedade 1.0, 2.0 e 3.0.

> A sociedade 1.0 reflete as normas e práticas que prevaleceram desde a sociedade pré-industrial até a sociedade industrial. Por sua vez, a sociedade 2.0 faz referência a enormes transformações sociais que estão tendo lugar na sociedade atual e que encontram sua origem principalmente na mudança tecnológica. Por último, a sociedade 3.0 faz alusão à sociedade de nosso futuro mais imediato, para que se prognosticam enormes transformações que são produto da mudança tecnológica acelerada (COBO; MORAVEC, 2011, p. 48).

14 Na literatura empregam-se diferentes termos para se referir a um mesmo objeto, fenômeno ou era, de acordo com a ênfase de cada autora o autor. Castells (1999) fala das *tecnologias da informação*, Serres (2013) das novas tecnologias, Cobo e Moravec (2011) usam as siglas TIC para se referir às *tecnologias de informação e comunicação*. Neste capítulo é usado o termo *tecnologias digital* para referenciar a todas elas de maneira global.

Significa que, antes de as tecnologias digitais aparecerem no panorama humano, a sociedade se caracterizava por se desenvolver em uma materialidade análoga, por uma ordem hierárquica, uma relação mecânica entre diferentes localizações geográficas e uma visão de mundo determinista. Após sua aparição, o paradigma social tem uma virada para a materialidade digital, no sentido de relações *heterárquicas* de poder entre as pessoas, a uma relação holográfica entre partes diferentes e uma visão indeterminada de mundo. Na atualidade, vivemos em transição entre a sociedade 2.0 e a 3.0. Ela se desenvolve em uma materialidade além do físico e do digital, ou seja, constituída por espaços de diversas naturezas, na ordem entre os sujeitos é intencionada ou auto-organizada, as relações entre diferentes partes são sinérgicas e a visão de mundo é planejada.

O OFICIAL E O NÃO OFICIAL

É possível reconhecer que a aparição das tecnologias digitais não apenas provocou uma mudança material, também uma no nível social, ou seja, a tecnologia é uma construção de nossas sociedades e mantém uma relação mutuamente constitutiva com elas. Entretanto, essa mudança social não se produziu de maneira uniforme e padronizada, ao contrário: ocorreu de forma heterogênea e diversa, de acordo com o grau de poder dos grupos sociais.

Rubio-Pizzorno (2018) faz uma distinção a respeito dessa mudança social distinguindo dois âmbitos, o *oficial* e o *não oficial*, em que o oficial é identificado como “as instituições, centros de ensino ou outras instancias que exercem certa autoridade sobre os membros ou conjunto da sociedade, nação, Estado ou entidades territoriais” (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3), e o não oficial é relacionado com a proliferação e expansão da Internet como ferramenta emancipadora. Suas dinâmicas têm se modificado em:

> Um nível de democratização social e abertura para a livre disponibilidade da informação, [...] motivados pela possibilidade que este âmbito dá às pessoas de incidir em mudanças locais, pessoais e coletivas, com efeitos e resultados instantâneos ou em curto prazo (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3).

Desta forma, se estabelece uma distinção entre o oficial, como as instituições dominantes em nossas sociedades; e o não oficial, como as organizações preocupadas com as reais necessidades das pessoas e suas comunidades.

Somada a esta distinção, Stacey e Hinchliff Pearson (2017) falam da maneira em que historicamente são administrados os recursos e compartilhadas as riquezas, que tem sido realizada por três entes: os comuns[15], o Estado e o mercado. Os comuns referem-se aos bens e recursos administrados e gerenciados de forma coletiva, ou como propôs Rowe (2013, p. 14),

> Os comuns incluem todo nosso sistema de suporte vital, tanto natural como social. O ar e os oceanos, a rede de espécies, a natureza selvagem e a corrente de água - todas são partes do comum. Também o são o idioma e o conhecimento, as calçadas e as praças públicas, as histórias infantis e os processos democráticos. Algumas porções dos comuns são presentes da natureza, outras são produto do esforço humano. Algumas são novas, como a Internet; outras são antigas como a terra e a caligrafia.

15 Os *comuns* (*los comunes*) é o termo de que há consenso para se referir a *the commons,* na tradução para o espanhol do livro *Made With Creative Commons*, de Stacey e Hinchliff Pearson (2017). Para verificar a reflexão sobre as diferentes traduções e interpretações do termo the commons para o espanhol, recomenda-se verificar o anexo *A tradução de The Commons* (*La traducción de The Commons*) na obra de Stacey e Hinchliff Pearson (2019, p. 17), cuja versão em pdf está disponível de maneira aberta, em espanhol, em: http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho_con_cc.pdf

Fundamentado nas contribuições de Rubio-Pizzorno (2018) e de Stacey e Hinchliff Pearson (2017), o presente capítulo considera o âmbito *oficial* como aquele representado pelo Estado e pelo mercado, preocupados em atender as necessidades institucionais e corporativas, e que, além disso, atualmente são as formas dominantes em nossas sociedades, inclusive sendo, às vezes, difícil determinar os limites entre um e outro. Por outro lado, o *não oficial* se refere ao âmbito representado pelos *comuns*, relacionado com a possibilidade que as pessoas e suas comunidades têm de materializar as soluções para seus problemas, em que o uso e desenvolvimento de tecnologia digital e aberta desempenham papel fundamental.

Como exemplo da distinção, a leitora ou o leitor pode pensar nas comunidades de *hackers*[16] como grupos sociais que se organizam de maneira não oficial, e nas corporações tecnológicas que realizam desenvolvimentos, principalmente de forma privativa e privada, como organizações oficiais. É importante destacar que, mesmo que ambas produzam tecnologia digital, elas são diferentes em seu propósito e na forma de desenvolvimento: umas de maneira aberta; e outras, fechada.

Para ilustrar a diferença entre software livre e privativo como construções do âmbito não oficial e oficial, respectivamente, tanto na tecnologia quanto em sua produção, pode-se recorrer à metáfora de um prato de comida e sua receita:

> O software privativo permite que se coma o prato da comida já cozida, mas proíbe de conhecer os ingredientes e suas quantidades para prepará-la em casa. O software livre tem a receita à disposição de todo mundo (código fonte). Assim, qualquer pessoa pode replicar a receita ou pode modificá-la, incorporando novos ingredientes próprios de una região para

16 Para mais informações sobre a comunidade de *hackers*, seu funcionamento, propósitos, ética e diferença dos piratas de informática ou os criminosos cibernéticos, recomenda-se verificar os textos *Ética Hacker, segurança e vigilância* (*Ética Hacker, Seguridad Y Vigilancia*) de Soria Guzmán (2016), e *Meu nome é Kohfam. identidade de um hacker: uma aproximação antropológica (Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*), de Contreras (2003).

> dar-lhe um novo sabor e, em seguida, compartilhar essa nova receita com o mundo inteiro (GARCÍA GAGO *et al.*, 2020).

Em educação matemática existem exemplos desses tipos de software, como o Cabri e o GeoGebra, sendo o primeiro um software privativo, desenvolvido por um número limitado de pessoas (CABRI, 2017), e o segundo, um *software* livre, o que implica que é uma comunidade aberta que desenvolve o software[17], e não há cobrança monetária pelo seu uso (RUBIO-PIZZORRO, 2020).

MUDANÇAS PROVOCADOS PELA REVOLUÇÃO DA TECNOLOGIA DIGITAL

Depois de reconhecer que as mudanças tecnológicas têm seu impacto na sociedade, e que elas ocorrem de maneira diferente nos âmbitos oficial e não oficial, é importante localizar os tipos de mudanças provocadas pela revolução da tecnologia digital em tais âmbitos.

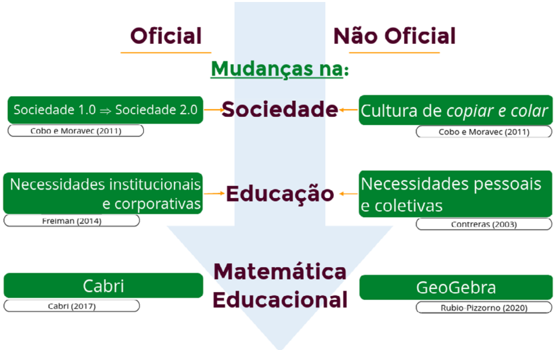
Em termos oficiais, a mudança de paradigma da sociedade 1.0 para a 2.0 já foi mencionada. No nível educacional, Freiman (2014) identifica que, em sua maioria, os órgãos oficiais se preocupam em incorporar a tecnologia considerando suas necessidades institucionais, ao invés de atender a necessidades educacionais das pessoas. Por outro lado, em termos do âmbito não oficial, em um nível social se reconhece a emergência do paradigma cultural do *copia e cola*, aludindo à "característica de misturar e reutilizar informação que já existe para dar lugar a significados tão exclusivos e pessoais quanto os das obras originais nas quais se embasam" (COBO; MORAVEC, 2011, p. 51). No nível educacional, existe um movimento espontâneo em

17 A leitora ou o leitor pode aprofundar conhecimentos sobre as características do software livre GeoGebra e suas implicações sociais na seção 2.1.3.3. *Construção social do GeoGebra (Construcción social de GeoGebra)*, de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 53 - 65), apenas em espanhol.

que as pessoas procuram atender suas necessidades educacionais pessoais e coletivas usando tecnologias digitais, sem a necessidade de passar por um filtro oficial (CONTRERAS, 2003). Por exemplo se pode citar o desenvolvimento do software livre GeoGebra e todos os recursos educacionais abertos que se constroem e compartilham em seu repositório[18], os quais são criados e compartilhados de maneira aberta pelos membros da comunidade; existe o movimento dos EduTubers, criadores de conteúdo educacional em formato vídeo, que são compartilhados de maneira gratuita no YouTube[19].

De maneira evidente, é possível reconhecer uma diferença nos efeitos da revolução da tecnologia digital nos âmbitos oficial e não oficial (ver Figura 1), em que no primeiro existe uma preocupação com o benefício econômico e as necessidades institucionais e corporativas; e o segundo se desenvolve de maneira comunitária e aberta, com uma marcada tendência coletiva e colaborativa que permeia todo este âmbito.

Figura 1 – Mudanças produto de revolução da tecnologia digital nos âmbitos oficial e não oficial



Fonte: Adaptado de Rubio-Pizzorno (2018).

18 Visite o repositório do GeoGebra intitulado *Materiais Didáticos (Recursos para el aula)*: geogebra.org/materials.

19 Para saber mais sobre o movimento dos EduTubers, recomenda-se ouvir o episódio 8 do podcast *Aula Aberta (Aula Abierta)*, apenas em espanhol: https://open.spotify.com/episode/6kToPSL8texSQRBHcn98jR

Dados os interesses dos autores do presente capítulo, seguiu-se focalizando a pesquisa até os efeitos da revolução da tecnologia digital na Matemática Educacional, especialmente na possibilidade de indagar a maneira como os aspectos sociais, culturais, coletivos e colaborativos incidem sobre o fenômeno de aprender e ensinar matemática. Desta maneira e com base no exposto nesta seção, propõem-se as seguintes perguntas para guiar a configuração do marco teórico da presente pesquisa:

1. Como a sociedade se organiza para construir conhecimento aproveitando a tecnologia digital?

2. Quais conteúdos de matemática e como eles são aprendidos na Era Digital?

Nas próximas seções, as ideias que permitem abordar essas perguntas são desenvolvidas.

PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA EDUCACIONAL - METODOLOGIA

A pergunta *como a sociedade se organiza para construir conhecimento aproveitando a tecnologia digital?* traz, de maneira implícita, a identificação de um objeto de estudo que transcende a Matemática Educacional. Este objeto se relaciona diretamente com aspectos de organização social e construção de conhecimento usando tecnologia digital, e por esta razão foi necessário buscar explicações em disciplinas como a sociologia e a antropologia para, então, articulá-las com aspectos da matemática educacional que permitiram abordar o fenômeno de maneira mais robusta. O propósito foi responder a um cenário mais próximo da realidade e menos artificial em termos educacionais.

Para desenvolver essa articulação de diferentes disciplinas e organizar suas contribuições, embasamo-nos na proposta sobre *produção de conhecimento em matemática educacional* de Lerman (2000), na qual emprega a ideia de *recontextualização* (Bernstein, 1996 *apud* Lerman, 2000), referida ao processo de adoção de marcos teóricos dentro de um campo. Esse processo ocorre em movimento e adaptação de ideais entre os seguintes níveis de conhecimento:

- **Nível 1:** Disciplinas circundantes ou que servem de fundamento para a matemática educacional, tais como psicologia, sociologia, filosofia, antropologia e matemática;
- **Nível 2:** Matemática educacional e outras áreas curriculares da pesquisa educacional;
- **Nível 3:** Currículo e práticas de aula.

Enquanto produção de conhecimento em matemática educacional, Lerman (2000, p. 20) enfatiza que o segundo nível de conhecimento "se relaciona de uma maneira mais horizontal com os domínios do primeiro nível, mais que ter uma relação hierárquica com eles". Desta forma se reconhece a capacidade que a matemática educacional tem para produzir conhecimento de maneira autônoma, e não apenas como uma recontextualização de outras disciplinas.

Nesta pesquisa, acreditamos que a construção de conhecimento pode ocorrer de ambas as formas (autônoma e como recontextualização). Com base nos interesses da pesquisa realizada, as disciplinas que servem de fundamento neste texto correspondem à antropologia, à sociologia e à pesquisa educacional.

TECNOLOGIA COMO PARTE DA SOCIEDADE: ANTROPOLOGIA

Para estudar os aspectos de organização social e construção de conhecimento usando tecnologia digital, recorremos a explicações teóricas da antropologia social, que tem a relação entre cultura e tecnologia como um de seus objetos de estudo. Assim, é possível considerar, de maneira apropriada, a mudança na forma de estudar o vínculo cultura-tecnologia pela antropologia (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015), em que é possível diferenciar dois paradigmas gerais de pesquisa.

- **Paradigma tradicional:** as pesquisas centram-se fundamentalmente no estudo de tecnologias e as mudanças tecnológicas em sociedades tradicionais, incorrendo em um reducionismo de considerar a tecnologia simplesmente como um fenômeno da cultura material das sociedades. Em termos mais simples, essas pesquisas consideram a tecnologia como um periférico, que poderia estar ou não, que se poderia colocar ou tirar da sociedade sem maiores problemas.

- **Paradigma moderno:** as pesquisas analisam a tecnologia como uma construção social, cultural e simbólica em nossas sociedades modernas e complexas. Isto com o propósito de ser sensíveis à realidade, se consideramos que "nossa vida cotidiana é impensável, hoje em dia, sem o enorme conjunto de artefatos técnicos que nos rodeiam" (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015, p. 10). Desta maneira, considera-se a tecnologia como um elemento próprio e constitutivo da sociedade, com o qual se passa de considerar uma *sociedade com tecnologia* para uma *sociedade tecnologizada*.

Neste texto, posicionamo-nos no paradigma moderno de pesquisa antropológica para fundamentar o estudo. Assim há condições de reconhecer a tecnologia como parte do "tecido sem costuras da sociedade, a política e a economia. [Em outras palavras], o desenvolvimento de um artefato tecnológico [...] não é simplesmente uma realização técnica; imersas nela se encontram as considerações sociais, políticas e econômicas" (PINCH, 2015, p. 25).

Assim, também segue uma pesquisa sobre as comunidades abertas construindo conhecimentos de diversos tipos, a partir da perspectiva da construção social da tecnologia digital.[20]

ESTRUTURA SOCIAL EM REDE E SEU SUPORTE MATERIAL HÍBRIDO: SOCIOLOGIA

Embora a contribuição da antropologia permita situar o presente estudo, é necessário ser mais específico a respeito do digital. Isto se deve a que ambos os paradigmas de pesquisa antropológica se referem à tecnologia de maneira geral, sem considerar as particularidades da tecnologia digital e a influência que poderia ter na sociedade, a qual, *a priori,* pode ser considerada diferente do que poderia provocar em relação às tecnologias não digitais.

Dada esta situação, Castells (1999) se apresenta como referência geral para entender as mudanças sociais provocados pela aparição da tecnologia digital no panorama humano. Uma das mudanças sociais mais importantes reportadas por Castells (1999) é o posicionamento da *sociedade em rede* como estrutura social predominante em nossas sociedades. Em outras palavras, "mesmo que a forma em rede

20 Para mais informações a respeito, sugere-se a *seção 2.1 Organização social propiciada pela tecnologia digital (Organización social propiciada por la tecnología digital)*, apenas em espanhol, da tese de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 18 - 66).

da organização social tenha existido em outros tempos e espaços, o novo paradigma da tecnologia [digital] [...] fornece a base material para que sua expansão afete toda a estrutura social” (CASTELLS, 1999, p. 506).

Especificamente esta base material da sociedade em rede é uma hibridização harmônica, e em alguns casos transparente, entre o físico e o digital. O físico entendido como espaço social clássico ou *espaço de lugares*, e o digital como um espaço social previsto pela tecnologia digital ou *espaço de fluxos*. Como exemplo, vejamos o caso do Colóquio da Comunidade GeoGebra Latino-americana (RUBIO-PIZZORNO, 2020). O evento foi transmitido para toda a América Latina e para o mundo através de uma vídeo-chamada aberta, em que um pesquisador da América Latina realizou uma apresentação sobre algum tema educacional ou matemático usando GeoGebra, um membro da Equipe da Comunidade GeoGebra Latino-americana moderou a apresentação (apresentação do pesquisador e perguntas do público), e um organizador gerenciou a sessão em geral. Geralmente todas as pessoas que participam do evento estão em diferentes lugares físicos. Vejamos um exemplo concreto: a sessão 6 do Colóquio, intitulada *Construindo cenários animados no GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de funções* (BASNIAK, 2020; COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA, 2019), foi realizada com o apresentador fisicamente na Cidade do México; a moderadora em Lima, no Peru; a pesquisadora no Paraná, Brasil; e o público estava conectado a partir de diferentes países da América Latina, estando fisicamente em lugares sociais clássicos (biblioteca, escritório, casa).

Se o Colóquio não contasse unicamente com um suporte material físico para a atividade acadêmica (sem computador, sem internet, etc.), a atividade não poderia ter sido realizada. Portanto, ao contar com ambientes e tecnologias digitais que permitem a comunicação sem barreiras geográficas, o Colóquio tem possibilidades de existir e funcionar, já que o fluxo acadêmico natural dessa atividade ocorre em uma simultaneidade de espaços físicos e digitais, ou seja, em um suporte material híbrido.

AMPLIAÇÃO DOS ESPAÇOS DE APRENDIZAGEM: PESQUISA EDUCACIONAL

Se consideramos a educação como uma manifestação social, então é natural pensar que as mudanças na estrutura social, provocadas pela interação com a tecnologia digital, também têm influenciado a configuração dos espaços educacionais. Desta forma, podemos perguntar: como a estrutura social em rede e sua materialidade híbrida se manifesta na educação?

Cobo e Moravec (2011) reconhecem que, graças às tecnologias digitais, podemos acessar conteúdos educacionais de maneira contínua e sem restrição de espaços.

> Uma das principais contribuições da adoção das tecnologias [digitais] [...] na vida cotidiana é que permitiu ampliar os limites pré-estabelecidos do que tradicionalmente se conhecia como espaços de aprendizagem. Em outras palavras, a domesticação (e invisibilidade) das tecnologias está abrindo novas possibilidades para converter outros espaços em laboratórios de aprendizagem.
>
> O valor deste olhar não está no “que” se aprende, mas em “como”, “onde” e “quando” [...]. Isto não significa que o “que” não seja importante, pelo contrário, mas é preciso também compreender que as tecnologias digitais têm permitido ampliar as dimensões temporais e espaciais do processo de aprendizagem. A partir de uma perspectiva cartográfica, poderíamos propor que se ampliasse o mapa da ecologia da aprendizagem. Neste novo plano, a aprendizagem transcende os espaços tradicionalmente delimitados para aprender. Tal como já destacamos, o novo panorama de aprendizagem

> será em 3D e 360º, incluindo outros territórios ignorados até o momento (COBO; MORAVEC, 2011, p. 111).

Este último ponto, sobre a possibilidade de estar ignorando outros territórios não explorados sugere a pergunta: que outros espaços existem além do físico e do digital? Para respondê-la podemos ver o exemplo de um jogo mundialmente conhecido: *Pokémon Go*©[21]. O jogo consiste basicamente na possibilidade de caçar Pokémons com o *smartphone* ao percorrer espaços físicos, ou seja, abrir o jogo no telefone, com a câmera se explora o espaço físico e por meio da tela é possível ver os pokémons que vão aparecendo, os quais se pode capturar. Em termos que já utilizamos neste texto, podemos afirmar que Pókemon Go permite explorar o espaço físico através de um dispositivo móvel para encontrar objetos digitais no espaço físico. A Figura 2 mostra alguns pokémons sobre o gramado, ao lado de uma árvore, ou como uma avozinha pega um desses bichos digitais entre suas mãos.

Figura 2 - Vista da Realidade aumentada de Pókemon Go

Fonte: Imagens tiradas do jogo Pókemon Go.

21 Mais informações sobre o jogo em seu website: www.pokemongo.com.

Poderíamos dizer que tais objetos digitais estão *na* realidade física, ou que a realidade física está se incorporando à realidade digital? Na verdade, podemos afirmar que as duas opções têm algo de certeza, já que este tipo de interação "nos dá a possibilidade de sobrepor uma realidade a outra através de um dispositivo que tenha uma tela e uma câmera. São duas realidades justapostas, uma sobre a outra" (CCD Radio, s.f.). Por esta razão, a este tipo de espaço se denomina *realidade aumentada*.

Assim como na realidade aumentada, é possível encontrar espaços de natureza distinta que têm começado a configurar o suporte material de nossa sociedade. Para mencionar alguns exemplos, existem o espaço físico, digital, a realidade aumentada, o vídeo 360, a realidade virtual, a realidade mista (ver Figura 3) e a realidade cinemática.

Figura 3 - Relação de espaços sobre a interatividade (esquerda) e movimento (direita)

Fonte: Centro de Cultura Digital (2018).

Portanto, não apenas os lugares físicos e digitais configuram-se em novos espaços de aprendizagem, mas existem espaços de outras naturezas que são suscetíveis de ser usados com fins educacionais.

ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS

A primeira pergunta proposta no início deste capítulo questiona: como a sociedade se organiza para construir conhecimento aproveitando a tecnologia digital? Para abordar a pergunta começou-se pela exploração das contribuições da antropologia, a partir das quais se reconhece a possibilidade de estudar e pesquisar as tecnologias como construção social. A sociologia permitiu reconhecer que a tecnologia digital está ampliando a materialidade social, partindo de uma exclusivamente física para uma hibridização entre o físico e o digital. Por sua vez, a pesquisa educacional ajudou a reconhecer a existência de outros espaços susceptíveis de serem usados com fins educacionais, como a realidade aumentada, realidade mista, entre outros. Todos esses espaços somam-se ao clássico espaço físico e ao espaço digital para configurar, aludindo a metáfora cartográfica de Cobo e Moravec (2011), novos territórios de aprendizagem, ou explicado de maneira mais sucinta, configuram novos *Ecossistemas Educacionais Híbridos*.

Desta forma, graças à integração das contribuições da antropologia, da sociologia e da pesquisa educacional, configura-se a ideia de Ecossistemas Educacionais Híbridos para reconhecer a materialidade híbrida de nossas sociedades atuais, que está constituída por espaços de diversas naturezas, que se intersectam, confluem e se integram de maneira harmônica e transparente.

Cada um dos espaços mencionados tem associado tecnologias características, mesmo que não excludentes de outros espaços (ver Figura 4). Por exemplo, os *smartphones* correspondem a uma tecnologia associada diretamente ao digital, não obstante, também possuem materialidade física (por exemplo, o aparelho, a bateria, a tela, os circuitos), e dependendo de suas características, também pode ser parte de uma materialidade de realidade aumentada para jogar Pókemon GO. O importante está em reconhecer a diversidade de espaços convergindo e o uso educacional que é possível dar a eles em nossos Ecossistemas Educacionais Híbridos.

Figura 4 - Constituição dos Ecossistemas Educacionais Híbridos por níveis

Fonte: Elaborada pelos autores usando ícones dos desenhistas Alfredo Hernandez, DinosoftLabs, Freepik, mavadee, Nikita Golubev, Pixelmeetup Smachicons, surang, turkkub, wanicon de www.flaticon.com; a logo dos REA da Unesco e a logo do GeoGebra.

Um tipo de tecnologia bastante identificada com o espaço digital corresponde aos recursos educacionais abertos - REA, dos quais é importante mencionar algumas de suas características. Os REA são definidos pela Unesco como

> Qualquer recurso educacional (inclusive mapas curriculares, materiais de curso, livros de estudo, streaming de vídeos, aplicações multimídia, podcasts e qualquer material que tenha sido projetado para o ensino e a aprendizagem) que esteja plenamente disponível para ser usado por educadores e estudantes, sem que haja necessidade de pagar royalties ou direitos de licença (BUTCHER, KANWAR; UVALIC-TRUMBIC, 2015, p. 5).

Além da livre disponibilidade dos REA, também se caracterizam por estar estritamente ligados ao âmbito não oficial no que diz respeito à sua produção, ou seja, que são produzidos sob a lógica dos comuns. Embora existam instituições do âmbito oficial que elaboram REA, também há muitas outras organizações não oficiais que os produzem, em outras palavras, que seus membros elaboram REA para atender suas próprias necessidades ou as de sua comunidade.

Um exemplo é a Comunidade GeoGebra, que gerencia um repositório de REA que conta com mais de um milhão de recursos[22], os quais foram elaborados praticamente em sua totalidade pelos membros da Comunidade GeoGebra, ou seja, professores, estudantes, pesquisadores, entusiastas do uso do software, etc.

Este repositório em geral e a maneira comunitária de criar os REA, em particular, é um exemplo da forma como a sociedade em rede se põe em funcionamento para construir socialmente uma tecnologia de maneira não oficial.

CONSIDERAÇÕES EPISTÊMICAS DOS ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS: MATEMÁTICA EDUCACIONAL

Na presente seção abordamos a segunda pergunta proposta na seção 1, relacionada especificamente com a matemática e seus processos de ensino e aprendizagem na Era Digital.

Embora Cobo e Moravec (2011) destaquem a importância de dar ênfase a *como* aprender sobre o *que* aprender, a partir da pesquisa disciplinar, neste caso, da matemática educacional, o *que* aprender, a matemática, está no centro da investigação.

Particularmente, o caso que nos ocupa, a educação da geometria, é uma das áreas da matemática educacional em que mais se tem investigado os efeitos da tecnologia digital.

> A tecnologia [digital] na educação da geometria se transformou na corrente principal [...] Isto, em parte, se deve à maneira

22 A leitora ou o leitor pode visitar o repositório da Comunidade GeoGebra, chamado Materiais Didáticos (*Recursos para el aula*), no site www.geogebra.org/materials, onde poderá encontrar REA elaborados com o GeoGebra em mais de 20 idiomas diferentes.

> como algumas tecnologias, como os ambientes de geometria dinâmica, modificam os objetos e discursos geométricos de maneira bastante significativa, em comparação com as aproximações com lápis e papel (SINCLAIR *et al.,* 2016, p. 704).

Além disso, os mencionados ambientes de geometria dinâmica – AGD, e o do GeoGebra em particular, são bons representantes de uma tecnologia digital que tem sido construída no âmbito não oficial, pelo qual se apresenta como uma tecnologia propícia para indagar o estado da pesquisa em matemática educacional incorporando tecnologia digital.

Com esta ideia em mente, em seguida apresenta-se o resultado de uma revisão de literatura para entender a maneira como a tecnologia digital está sendo usada na pesquisa, visando àquelas que usam AGD. A este respeito, foram identificadas três tendências na pesquisa.

COM OU SEM TECNOLOGIA DIGITAL?

Este é o modelo típico de pesquisa sobre os efeitos da tecnologia digital em matemática educacional. São muito abundantes as investigações sobre AGD que realizam uma comparação entre realizar tarefas com papel e lápis, e aquelas realizadas em AGD. Alguns exemplos desta tendência na pesquisa em matemática educacional são os trabalhos de Stylianides e Stylianides (2005), Iranzo e Fortuny (2009), Koyuncu *et al.* (2015), e Hitt *et al.* (2017a, b).

Esta tendência de pesquisa e sua pergunta motivacional (Com ou sem tecnologia digital?), correspondem ao paradigma tradicional de pesquisa antropológica sobre a relação entre tecnologia e cultura, já que nela se vê a tecnologia como um periférico das sociedades, o qual poderia estar ou não presente em nossas sociedades, sem maiores consequências.

AMPLIAÇÃO DO FÍSICO AO DIGITAL

A segunda tendência está marcada pelo interesse em estender os resultados e conclusões da pesquisa realizada em espaços físicos para os espaços digitais. Esta ampliação tem sido realizada tanto na elaboração de projetos e de recursos, que podem estar baseados ou não na pesquisa; e nas explicações teóricas dos fenômenos associados à presença da tecnologia digital para ensinar ou aprender matemática.

Sinclair e Yerushalmy (2016) refletem sobre este tema no campo da pesquisa em matemática educacional.

> Em termos teóricos, temos percebido uma tendência de pesquisadores de combinarem duas ou mais perspectivas teóricas para considerar adequadamente seus contextos de pesquisa. Às vezes, as teorias gerais de aprendizagem devem ser combinadas com teorias que proporcionam uma abordagem mais centrada no uso das ferramentas e seu papel no ensino e na aprendizagem. Vemos a necessidade de articular melhor as teorias de aprendizagem com as teorias de uso de ferramentas que atualmente se fazem, na maior parte, combinando abordagens (SINCLAIR; YERUSHALMY, 2016, p. 264).

Assim, mostra-se a necessidade de abordar as pesquisas que envolvem a tecnologia digital nos fenômenos didáticos ligados com a matemática, atendendo explicações teóricas sobre aprendizagem e as que estão centradas no uso da tecnologia digital e como influencia o ensino e a aprendizagem.

Desta forma, essa tendência de pesquisa corresponde a uma transição entre o paradigma tradicional e o moderno na investigação antropológica sobre a relação entre tecnologia e cultura. Essa transição se caracteriza por começar a reconhecer a necessidade de não trivializar o papel da tecnologia em sua relação constituinte com a cultura, e consequentemente, ao estar presente em fenômenos educacionais.

ÊNFASE EPISTÊMICA: O ESPECÍFICO DO DIGITAL NA EDUCAÇÃO

A terceira tendência caracteriza-se pelo interesse em questionar o específico de aprender ou de ensinar matemática em espaços digitais. Já não há lugar para a pregunta: com ou sem tecnologia digital? Ainda, tentativas de estender as explicações sobre o uso de tecnologia analógica (de espaços físicos) para a tecnologia digital estão sendo abandonadas. Aqui, o foco da atenção está em reconhecer a existência de uma mudança na maneira de interagir com a matemática, quando se utiliza a tecnologia digital.

Para o específico ou próprio de aprender ou ensinar matemática com tecnologias digitais, Artigue (2002, p. 248) chama o *valor epistêmico* das técnicas instrumentadas, "o qual contribui para o entendimento dos objetos nos quais está envolvido" e, portanto, converte-se em "uma fonte de perguntas sobre o conhecimento matemático". É importante observar que Artigue reconhece, também, que as técnicas instrumentadas têm *valor pragmático,* referido ao "seu potencial produtivo (eficiência, custo, campo de validade)" (ARTIGUE, 2002, p. 248). Algumas pesquisas que se embasam no valor epistêmico das técnicas instrumentadas por AGD, embora não necessariamente o declarem como parte de seu suporte teórico, são a de Arzarello, Olivero e Robutti (2002), pois se baseiam nas tipologias cognitivas do uso do arrasto por estudantes para resolver problemas geométricos; a de Laborde (2002), que investiga diferentes tipos de tarefas ao estudar geometria, e identifica que em tais ambientes emergem novos tipos de tarefas, as quais unicamente têm sentido e significado na AGD, ou seja, são tarefas que somente são possíveis de resolver em um espaço de características específicas dela; a de Cantoral e Montiel (2014), os quais estudam funções mediante tratamento gráfico, que se realiza através de três aproximações: tabulação, transformações e operações gráficas; a de Sinclair e Yurita (2008), que estudam famílias de quadriláteros mediante o exame de seu comportamento e o que fica invariável ao aplicar o arrasto.

Um aspecto importante a destacar dessa tendência é que, assim como propôs Artigue (2002), na atualidade, a pesquisa tem o desafio de buscar equilíbrio entre os valores pragmático e epistêmico ao envolver a tecnologia digital, pois ambos os valores são inseparáveis (CHEVALLARD, 1992). Além disso, Artigue (2009) adverte que essa busca de equilíbrio não é trabalho fácil, e que frequentemente encontra resistência, porque

> as tecnologias digitais fervem sobre o equilíbrio tradicional entre os valores pragmático e epistêmico das técnicas que se construíram em uma cultura de papel e lápis. Uma razão essencial para isso é a forma que os sistemas educacionais tendem a se adaptar às tecnologias digitais sem reconsiderar seus valores fundamentais, tratando a tecnologia [digital] como um simples coadjuvante pedagógico [...]. Isso requer tarefas e situações que não sejam uma simples adaptação das tarefas de papel e lápis, frequentemente tarefas sem equivalente no ambiente de papel e lápis, portanto, as tarefas não são tão fáceis de projetar quando se ingressa no mundo tecnológico [digital] com sua cultura de papel e lápis (ARTIGUE, 2009, p. 467- 468).

Como consequência, a valorização das tecnologias digitais na educação é um assunto cultural, ou, de maneira mais precisa, uma mudança entre a cultura tradicional de lápis e papel e a cultura digital. Assim, é natural estabelecer relação entre a ênfase epistêmica com o paradigma moderno de pesquisa antropológica sobre o vínculo tecnologia-cultura, que aceita a tecnologia (digital) como construção social, cultural e simbólica em nossas sociedades modernas e complexas. Explicando de outra forma, a tecnologia é parte da cultura e, por sua vez, da sociedade.

ECOSSISTEMA EDUCACIONAL HÍBRIDO EM MATEMÁTICA EDUCACIONAL

Conforme comentado na seção 3, o presente trabalho posiciona-se no paradigma moderno de pesquisa antropológica, e por esta razão é relevante para o propósito de responder a segunda pergunta proposta na seção 1, relativa a qual matemática e como se lhe aprende na Era Digital, abordar a proposta de enfatizar a valorização epistêmica da tecnologia digital ao estudar matemática, considerada na seção anterior. Não obstante, à luz da proposta dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, é importante reconhecer que, nesses ecossistemas, outros espaços intervêm, além do físico e do digital, como a realidade aumentada ou o vídeo 360.

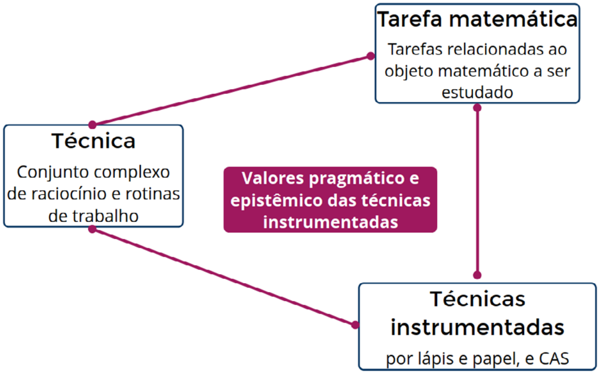
Desta forma, é sensato perguntar se é possível explorar o valor epistêmico em outras tecnologias diferentes das digitais, e finalmente, em valorizar epistemologicamente o uso das tecnologias de todos os espaços que configuram os Ecossistemas Educacionais Híbridos.

VALORES EPISTÊMICO E PRAGMÁTICO DA TECNOLOGIA DIGITAL

Para abordar essa questão, é necessário voltar à proposta original de Artigue (2002), que se refere aos valores epistêmico e pragmático exclusivamente das técnicas matemáticas, em que a técnica é um constructo herdado da teoria antropológica do didático - TAD, mesmo ampliada pela autora, de “uma maneira de resolver uma tarefa” a uma “complexa montagem de razoamentos e rotina de trabalho” (ARTIGUE, 2002, p. 248). Em relação às técnicas analisadas na pesquisa, a autora declara dois tipos: técnicas de lápis e papel e técnicas instrumentadas[23] (ver Figura 5).

É interessante observar que, cada vez que Artigue fala do valor epistêmico ou pragmático de uma técnica, sempre está se referindo a uma técnica junto com a tecnologia usada na tarefa matemática, seja ela de lápis e papel ou tecnologia digital. Disto se pode inferir a relação indissolúvel entre a técnica e a tecnologia utilizada na tarefa matemática. Esta inferência tem mais sentido quando examinadas as bases de distinção entre os valores pragmático e epistémico, que é original da ergonomia cognitiva (VÉRILLON; RABARDEL, 1995) e está referido ao esquema de uso da tecnologia. Assim, os *valores epistémico e pragmático da técnica* são uma articulação entre constructos da ergonomia cognitiva e da TAD (ARTIGUE, 2007).

Figura 5 - Valores pragmático e epistêmico das técnicas instrumentadas



Fonte: Elaborada com base em Artigue (2002).

23 Artigue (2002) refere-se às *técnicas instrumentadas* para falar das *técnicas instrumentadas por tecnologias computacionais*. Portanto, quando aparece a frase *técnica instrumentada* neste texto, a leitora ou o leitor pode presumir, sem perda de precisão, que está se falando de técnicas ao usar tecnologias digitais. Este esclarecimento é necessário para manter a coerência de termos usados no presente capítulo.

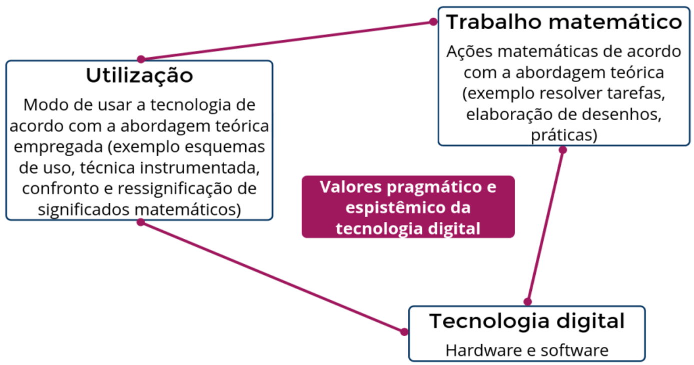
Somado a isso, o uso desses termos na literatura especializada é flexível, adicionado a outros ao invés de se referir à técnica. Por exemplo, em Sinclair *et al.* (2009), a respeito do desenvolvimento de tarefas em uma AGD e o uso do arrasto, falam dos valores epistêmico e pragmático das *práticas instrumentadas*, das *ações*, da *ferramenta* e da *prática*. Em Monaghan e Trouche (2016), sobre o projeto de tarefas com ferramentas digitais, referem-se ao *valor epistêmico da tarefa*, mesmo necessitando esclarecer em nota de rodapé, que tal frase pode ser considerada uma abreviação do *valor epistêmico da técnica requerida para resolver a tarefa.* Por sua vez, Artigue (2009), fazendo uma reflexão de sua pesquisa de 2002, refere-se ao *poder epistêmico e pragmático da tecnologia.*

Considerando o uso indissolúvel entre técnica e tecnologia, a origem da distinção entre valores epistêmico e pragmático ao usar tecnologias, e a flexibilidade no uso do termo referido à *técnica* na literatura especializada, é possível reconhecer que o constructo *valores epistêmico e pragmático da técnica* se deve ao posicionamento teórico e aos interesses de Artigue, que tinha o objetivo de usar ferramentas teóricas que lhe permitissem dar conta do papel dos instrumentos e do trabalho técnico, para o qual declara que "as aproximações antropológicas e socioculturais parecem ser mais sensíveis ao papel que desempenham os instrumentos no trabalho matemático, e para considerar, de maneira apropriada, o papel do 'trabalho técnico'" (ARTIGUE, 2009, p. 47). É de onde advém a forte ênfase na técnica.

Sob essas considerações, pode-se ampliar o constructo *técnica instrumentada* para *uso – em sentido amplo – da tecnologia digital,* ao desenvolver um trabalho matemático (por exemplo, resolver tarefas, solucionar problemas, elaborar projetos). O uso da tecnologia digital se verá, então, permeado pela teoria empregada na pesquisa correspondente, podendo se traduzir no estudo do artefato, quando se trabalha com ergonomia cognitiva; no estudo de técnicas instrumentadas, quando se trabalha com a aproximação instrumental; e no estudo da confrontação e ressignificação de significados matemáticos com o uso de tecnologia digital, quando se trabalha com a Socio-epistemologia (RUBIO-PIZZORNO, 2018)[24], entre outros.

Assim, também é possível recorrer à economia de linguagem para falar simplesmente de *valores epistêmico e pragmático da tecnologia digital* (ver Figura 6), entendendo que essa valoração poderá ser realizada sempre que haja uso matemático da tecnologia. Em outras palavras, a tecnologia digital *per se* não tem valoração epistêmica ou pragmática, mas ela só ocorre quando se realiza um trabalho matemático com ela. Como afirmou Artigue (2002, P. 268), “o valor epistémico [e pragmático], é claro, não é algo que se possa definir de maneira absoluta; ele depende dos contextos”.

Figura 6. Valores pragmático e epistêmico da tecnologia digital



Fonte: Elaborada pelos autores.

24 Para este assunto em particular, recomenda-se especificamente a seção 2.4.3. *Confrontos de significados matemáticos (Confrontación de significados matemáticos)*, apenas em espanhol (RUBIO-PIZZORNO, 2018, pp. 127 - 133).

VALORES EPISTÊMICO E PRAGMÁTICO DAS TECNOLOGIAS

Depois de reconhecer a possibilidade de valoração epistêmica e pragmática da tecnologia digital, fica pendente explorar a possibilidade de ampliar essa valoração para as tecnologias representativas de outros espaços, como o físico, a realidade aumentada, etc., ou seja, dos espaços que constituem os Ecossistemas Educacionais Híbridos.

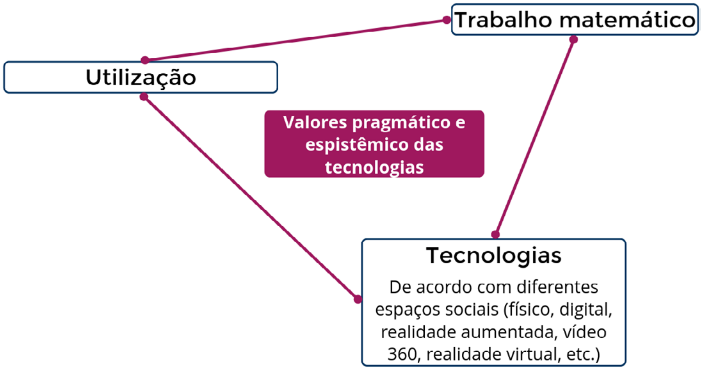
Em primer lugar, é necessário recordar que, na proposta original sobre o valores epistêmico e pragmático, Artigue (2002) reconhece essa valoração para o lápis e papel (tecnologia de espaço físico) e para o CAS (tecnologia digital). Portanto, desde o início se reconhece a valoração, não apenas das tecnologias digitais, também daquelas correspondentes a espaços físicos, como o lápis e o papel.

Por outro lado, a relação entre a matemática e a tecnologia tem longa data. Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) realizaram uma revisão histórica sobre essa relação, em que propõem que é uma constituinte mútua, e que tem ocorrido a partir de suas origens até nossos tempos, ou seja, desde os ossos com marcas realizadas há 30.000 anos (a.C.), encontrados em Moravia, até as tecnologias mais recentes. Com base na revisão histórica, os autores descreveram cinco etapas da relação entre a matemática e a tecnologia, as quais correspondem às etapas estática inerte, estática cinestésica/estética, estática computacional, dinâmica discreta e dinâmica contínua.

É necessário reconhecer que a matemática e a tecnologia têm estado sempre relacionadas, desde os entalhes nos ossos para contar, até a criação de modelos matemáticos com realidade aumentada ou virtual, passando pelo ábaco e pela calculadora, que permitem admitir que as tecnologias usadas em cada etapa têm servido a um propósito matemático, ou seja, para fazer algo matematicamente. Portanto, podemos propor que toda tecnologia, não importando a qual espaço represente (físico, digital, realidade aumentada, etc.), que seja usada para desenvolver um trabalho matemático, tem seus valores epistêmico e pragmático (ver Figura 7). Estes últimos correspondem a:

- **Valor epistêmico das tecnologias:** formas como as tecnologias ajudam a compreender o objeto matemático e geram perguntas sobre ele, quando usadas para desenvolver um trabalho matemático específico.
- **Valor pragmático das tecnologias:** potencial produtivo das tecnologias, ou seja, eficiência, custo e campo de validade.

Figura 7 - Valores pragmático e epistêmico das tecnologias



Fonte: Elaborada pelos autores.

Desta forma, conseguimos dar respostas para as perguntas motivadoras deste estudo, reconhecendo a existência dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, e a valorização epistêmica e pragmática das tecnologias que representam cada um dos espaços que constituem tais ecossistemas, quando usadas em um trabalho matemático. No esquema da Figura 7 estão sintetizadas as contribuições das explicações antropológicas, sociológicas, de pesquisa educacional e da matemática educacional, as quais têm se articulado mediante o desenvolvimento autônomo da última e a recontextualização das primeiras, com o objetivo de construir conhecimento, tal como proposto na seção 2.

Para operacionalizar essa proposta, em seguida se apresentam os aspectos a ser considerados para o uso dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, seja para elaborar projetos educacionais, para analisar a implementação de projetos, na pesquisa, etc., sempre a partir de um enfoque teórico específico da matemática educacional:

I. *Explorar as tecnologias disponíveis*, considerando os diferentes espaços sociais;

II. *Posicionar-se em um enfoque teórico específico* que permitirá determinar a que se refere, em particular, o trabalho matemático e o uso das tecnologias;

III. *Indagar os valores epistêmico e pragmático das tecnologias* características dos diferentes espaços, no desenvolvimento do trabalho matemático específico;

IV. *Explorar a maneira de usar coordenadamente as diferentes tecnologias* para melhor aproveitamento de seus valores pragmático e epistêmico no desenvolvimento do trabalho matemático.

Na seção seguinte mostra-se, como exemplo, a elaboração de um projeto educacional seguindo as pautas da operacionalização dos Ecossistemas Educacionais Híbridos na pesquisa em matemática educacional.

UM EXEMPLO A MODO DE CONCLUSÃO

Nesta seção apresenta-se um exemplo para ilustrar o reconhecimento e uso dos Ecossistemas Educacionais Híbridos na matemática educacional, especificamente com o uso do GeoGebra.

Usam-se os quatro pontos da operacionalização da proposta dos Ecossistemas Educacionais Híbridos recém anunciados, para analisar o exemplo que corresponde ao projeto de um REA construído no Livro GeoGebra, articulando tecnologias dos espaços físico e digital, para o estudo da conservação de áreas. Esse REA foi projetado como parte do Seminário de Integração Digital para a Prática do Docente de Matemática, reportado no trabalho de Rubio-Pizzorno (2018).

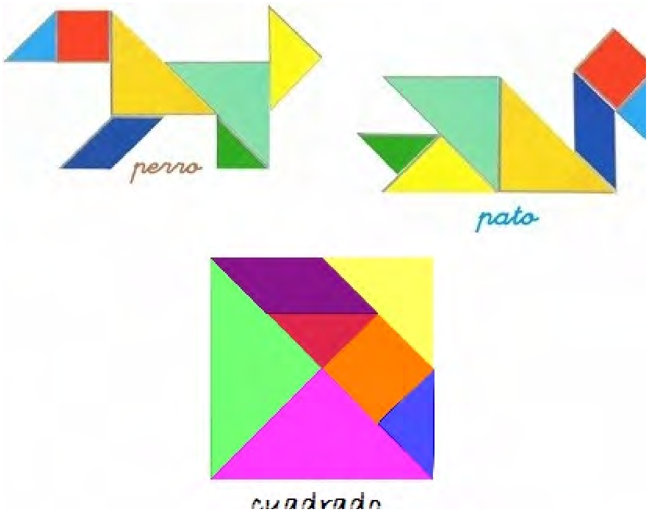
Cabe destacar que, para proceder com a operacionalização dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, primeiro se atendeu a um conteúdo curricular, já que o REA foi projetado para ser implementado em condiciones educacionais reais, ou seja, com um grupo de estudantes de 5º ano.

No Seminário se estava trabalhando com base na proposta teórica da confrontação e ressignificação dos significados matemáticos (ver nota de rodapé de número 10). Consequentemente, o trabalho matemático estava determinado pelas práticas matemáticas realizadas com o uso das tecnologias, para confrontar os significados associados com a conservação de área.

Dada a postura teórica, buscaram-se significados escolares a serem confrontados, associados à conservação de áreas. Para isso, embasamo-nos nas ideias reportadas por Kospentaris, Spyrou e Lappas (2011), que relatam que as crianças tendem a pensar que, quanto maior a área das figuras estudadas, maior deve ser seu perímetro; e que apenas as figuras congruentes têm área igual.

Com essas duas ideais a confrontar, exploraram-se as tecnologias disponíveis que puderam servir ao propósito, ou seja, que tiveram valores epistémico e pragmático que permitiram confrontar essas ideias. Para isso considerou-se o uso do tangram de madeira, para comparar figuras com igual área, mas com diferentes perímetros, e assim confrontar a relação área-perímetro já descrita. A atividade projetada consiste em pedir aos estudantes que armem diferentes figuras (cachorro, pato) usando todas as peças do tangram de madeira (ver Figura 8), para depois medir o perímetro de cada figura e compará-lo com a outra. Com essa atividade pretende-se que os estudantes possam identificar figuras que têm perímetros diferentes e supor que a figura com maior perímetro também tem maior área. Porém, ao refletir que ambas as figuras foram armadas exatamente com as mesmas peças, confronta-se essa ideia de que quanto maior perímetro, maior a área; também se espera que possam concluir que figuras que têm igual área podem ter perímetros diferentes.

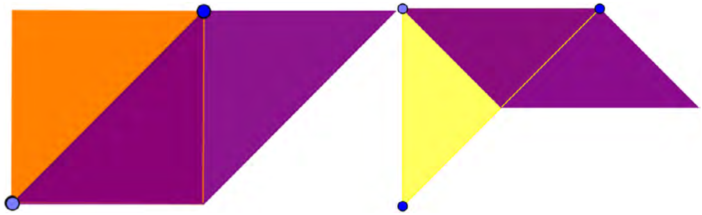
Figura 8 - Diferentes configurações do tangram



Fonte: Alvarez Zamorano (2018, p. 41).

Em relação à congruência-área, o tangram de madeira permite confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm igual área, através da comparação por sobreposição das peças. Por exemplo, é possível comparar a superfície do quadrado, o triângulo amarelo e o romboide (roxo), mediante a sobreposição das peças com uma configuração específica (como se mostra na Figura 9). Ao realizar essa comparação, pode-se observar que o quadrado e o romboide têm uma superfície comum, e que as superfícies não comuns são triângulos congruentes. Esse trabalho matemático de comparação por sobreposição pode ser realizado também com o triângulo amarelo e o romboide, obtendo o mesmo resultado. Isso permite confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm a mesma área.

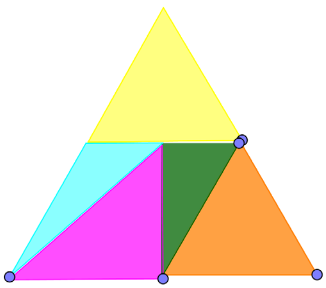
Figura 9 - Comparação de áreas mediante sobreposição das peças



Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.2).

Contudo, essa estratégia envolve unicamente a comparação de área de polígonos de tipo diferente, ou seja, não permite confrontar essa ideia com polígonos de igual tipo. Devido a esta situação, explorou-se a possibilidade de usar o AGD do GeoGebra para aproveitar a facilidade de seu uso para realizar construções geométricas precisas. Assim, elaborou-se um tangram em AGD do GeoGebra, constituído unicamente por triângulos (Figura 10), em que alguns deles têm a mesma área.

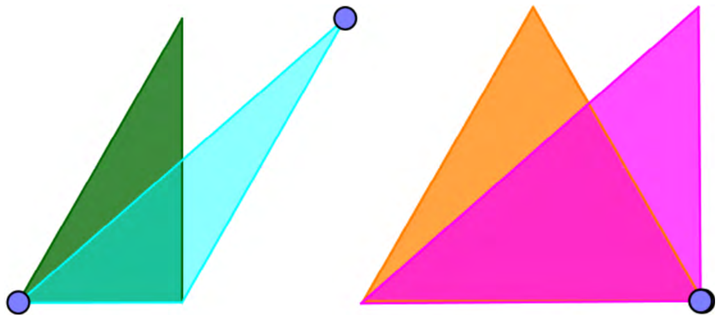
Figura 10 - Tangram triangular



Fonte: Alvarez Zamorano (2018, p. 44).

Este tangram permite comparar a área de triângulos diferentes através de sobreposição de triângulos, fixando a base e depois analisando se suas alturas em relação à tal base são da mesma longitude (ver Figura 11).

Figura 11 - Comparação de triângulos através de sua base e altura



Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).

Usando o tangram triangular dessa maneira, é possível confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm a mesma área.

Finalmente, todas as atividades recém apresentadas incorporaram-se a um Livro GeoGebra, para estabelecer uma sequência educacional para aproveitar os valores epistêmico e pragmático de cada tecnologia, bem como para o uso coordenado delas.

Em primeiro lugar dispõem-se as atividades com o tangram de madeira, dada a experiência dos estudantes de 5º ano com os materiais manipuláveis. Em seguida propõem-se atividades de medição de área e perímetro do tangram e suas peças, e depois, propõe-se a atividade correspondente à Figura 8. Para transitar das atividades com o tangram de madeira para o uso do AGD do GeoGebra, dispõe-se de uma atividade para armar as figuras do pato e do cachorro em um tangram digital, para realizar a mesma comparação da relação entre área e perímetro, mas agora com uma tecnologia digital. Com o mesmo tangram digital também se propõem atividades para comparar a área e o perímetro das peças do tangram.

Para introduzir, em seguida, a comparação de triângulos mediante sua base e altura, dispõe-se de uma atividade para relacionar a área e o perímetro de triângulos, considerando ambos os elementos. Então, introduz-se o trangram triangular criado com o GeoGebra nessa parte (ver Figura 10), para confrontar a relação congruência-área.

Além disso, o Livro GeoGebra apresenta-se como um ambiente digital para organizar e estruturar as atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes em ambos os espaços (físico e digital) com o uso de diferentes tecnologias (tangram de madeira, lápis e papel, AGD do GeoGebra, perguntas de múltipla escolha e de resposta aberta (questões dissertativas) do Livro GeoGebra, também a exploração de objetos físicos cotidianos de uma aula).

Desta forma, abordaram-se as duas ideais sobre conservação de área a confrontar, referidas na relação área-perímetro e congruência-área, usando a abordagem dos Ecossistemas Educacionais Híbridos na elaboração de um REA. O quadro 1 expõe uma síntese dos elementos envolvidos na abordagem dos Ecossistemas Educacionais Híbridos para a noção de conservação de área recém desenvolvida, considerando os seguintes elementos teóricos com base na confrontação de significados matemáticos (RUBIO-PIZZORNO, 2018).

- **Uso das tecnologias:** confrontação e ressignificação de significados associados à conservação de área, com o uso do tangram e de AGD do GeoGebra;
- **Trabalho matemático:** práticas matemáticas, como a comparação por sobreposição ou de acordo com a base e altura de triângulos.

Tabela 1 - Análise dos Ecossistemas Educacionais Híbridos em Alvarez Zamorano (2018)

Espaços	Tecnologias	Valor epistêmico	Valor pragmático
Físico	*Tangram de madeira*	*Comparação por sobreposição das superfícies das peças para confrontar a relação entre área e perímetro.*	*Facilidade para manipular suas peças.*
Digital	*Tangram triangular e digital*	*Comparação de triângulos usando a técnica da altura e base iguais para confrontar a relação congruência-área.*	*Facilidade para realizar construções geométricas precisas.*

Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do paradigma antropológico moderno da relação entre cultura e tecnologia é possível considerar as tecnologias como construção social, a qual permite reconhecer que são parte natural de nossos ecossistemas educacionais. Também, a partir da contribuição da sociologia e da pesquisa educacional tem sido possível reconhecer que, na atualidade, a materialidade social é uma hibridização entre espaços de diferentes naturezas. Assim, é possível reconhecer a existência e validade dos Ecossistemas Educacionais Híbridos como consequência de abordar a pergunta: como a sociedade se articula para construir conhecimento aproveitando as tecnologias?

Um aspecto importante para ressaltar, dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, é que são construídos a partir do não oficial, representado pelos recursos educacionais abertos ou REA, que constroem comunidades abertas. Esses REA são parte dos comuns, ou, explicado de outra forma, do acervo de conhecimento e bens construídos aberta e socialmente, para atender as necessidades educacionais pessoais e comunitárias.

Portanto, a importância da proposta dos Ecossistemas Educacionais Híbridos vai além de apenas considerar o aspecto tecnológico. Em termos docentes, a importância reside em que os professores e professoras tenham oportunidades de atender as necessidades e inquietudes educacionais de seus estudantes, a partir de uma posição de autonomia e empoderamento docente, que pode ser complementada com a atenção obrigatória às normas educacionais oficiais. Isso é possível graças a que, em primeiro lugar, já estamos em condições de reconhecer a existência de diferentes espaços sociais com suas respectivas tecnologias, as quais podemos aproveitar, de acordo com sua disponibilidade, para nossos propósitos educacionais; em segundo lugar, já existe um grande acervo de recursos educacionais reunido em múltiplos repositórios de REA, onde os professores podem buscar e usar os que se ajustem a suas necessidades; e em terceiro lugar, existem as condições técnicas para que os professores possam criar e compartilhar, de maneira aberta, seus próprios recursos educacionais.

Em termos disciplinares, representa a oportunidade de aproveitar as tecnologias com um sentido educacional e didático mais consciente, ou seja, aproveitá-las pragmática e epistemicamente, o que aborda o questionamento sobre qual matemática e como se aprende na era digital. Já somos conscientes da variedade de espaços sociais e suas tecnologias, os quais se pode aproveitar na educação. Além disso, já contamos com as ferramentas para valorizar tais tecnologias com sentido educacional e didático, aproveitando seu potencial de uso e as formas com que ajudam a compreender um objeto ou noção matemática.

Isto informa sobre uma nova tendência de pesquisa com tecnologias em matemática educacional, que nos propõe questionar sobre os valores pragmático e epistémico de todas as tecnologias.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ ZAMORANO, M. A. *Conservación de área [Libro GeoGebra],* 2018. Disponível em: https://mat.geogebra.org/m/MUh7Pzz8

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2002, *7* (3), pp. 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080.

ARTIGUE, M. Digital technologies: A window on theoretical issues in mathematics education. In: D. PITTA-PANTAZI; G. PHILIPPOU (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for research in mathematics education* (2007, Vol. 5, pp. 68–82). Larnaca, Chipre: University of Cyprus and ERME. Disponível em: https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/plenaries.pdf

ARTIGUE, M. The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In: B. R. HODGSON, A.; KUZNIAK; J.-B. LAGRANGE (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (2009, pp. 463–475). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., Y ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik,* 2002, *34* (3), 66–72. doi: 10.1007/BF02655708

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 9* (1), 2020, 10-25. ISSN: 2316-8889. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BUTCHER, N.; KANWAR, A.; UVALIC-TRUMBIC, S. *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA).* Francia: UNESCO, 2015. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986

CABRI. Cabri Express terms of use. 2017. Disponível em: https://cabri.com/en/

CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación, 2014.

CASTELLS, M. La Era de la Información. Economía, Sociedad y Cultura: La Sociedad Red. Volumen I. Siglo XXI, Estado de México, México, 1999.

CCD Radio (Sin fecha). *Inmersión: RV, RA, RM [podcast].* En Glitch. Disponível em: https://soundcloud.com/ccd-radio/glitch-2.

CENTRO DE CULTURA DIGITAL. *Cada tecnología inmersiva se relaciona con el movimiento de distinta manera: en video 360 al girar la cabeza movemos la cámara; en #VR podemos desplazarnos en el espacio de una habitación; y en la mixta la libertad de movimiento se abre hacia espacios más extensos. #LabInmersión [twitt].* 28 de febrero de 2018. Recuperado de: twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. En B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183–203). Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

COBO, C.; MORAVEC, J. W. *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación.* Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2011.

COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA. S06 Construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções [Video]. *Coloquio GeoGebra de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana – Año 1*, sesión 6, 2019. Recuperado de: https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ.

CONTRERAS, P. *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona, 2033.

FREIMAN, V. Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education.* 2014, pp. 623–629. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.

GARCÍA GAGO, S.; OBREGÓN, J.; ROBAYO, C.; SPITIA, N.; ALMARAZ FUNES, J.; BRAVO, L. *El software libre en la radio. Migrar la tecnología*. Red de Radios Comunitarias y Software Libre y la Asociación Latinoamericana de Educación y Comunicación Popular (ALER), 2020. Disponível em: https:https://liberaturadio.org/manual-el-software-libre-en-la-radio/.

HITT, F.; SABOYA, M.; CORTÉS, C. Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers. En: Aldon Gilles; Fernando Hitt; Luciana Bazzini y Uwe Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education,* 2017a, pp. 57–74. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-51380-5_4.

HITT, F.; SABOYA, M.; ZAVALA, C. C. Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics,* 2017b, *94* (1), pp. 97–116. doi: 10.1007/s10649-016-9717-4.

IRANZO, N.; FORTUNY, J. M. La influencia conjunta del uso del GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias,* 2009, *27* (3), pp. 433–446.

KOSPENTARIS, G.; SPYROU, P.; LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 2011, *77* (1), pp. 105-127. doi: 10.1007/s10649-011- 9303-8.

KOYUNCU, I.; AKYUZ, D.; CAKIROGLU, E. Investigationg plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in thecnology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 2015, *13* (4), pp. 837–862. doi: 10.1007/s10763-014-9510-8.

LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2002, *6* (3), pp. 283–317. doi: 10.1023/A:1013309728825.

LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. En Joe Boaler (Ed.), Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning. *International Perspectives on Mathematics Education,* 2000, pp. 19–44. Londres, United Kingdom: Ablex.

MONAGHAN, J.; TROUCHE, L. Tasks and Digital Tools. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (eds.) *Tools and Mathematics.* Instruments for learning, 2016, 391 - 416.

MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S. J.; KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics,* 2008, *68* (2), 99–111. DOI: 10.1007/s10649-008-9116-6.

PINCH, T. La construcción social de la tecnología: una revisión. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015. capítulo 2, pp. 18–37. Fondo de Cultura Económica, México.

POKÉMON. Disponível em: www.pokemongo.com.

ROWE, J. *Our Common Wealth. Hidden Economy That Makes Everything Else Work.* Berrett-Koehler Publishers: San Francisco, Estados Unidos, 2013.

RUBIO-PIZZORNO, S. *Integración digital a la práctica del docente de geometría.* Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México:

Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), 2018. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1.

RUBIO-PIZZORNO, S. Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto GeoGebra de São Paulo, 9* (1), 10-25. ISSN: 2316-8889, 2020. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

SANTOS, M. J.; DÍAZ CRUZ, R. Voces plurales en los estudios de tecnología y cultura: una introducción. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas,* 2015, capítulo 1, pp. 9–17. Fondo de Cultura Económica, México.

SERRES, M. *Pulgarcita: el mundo cambió tanto que los jóvenes deben reinventar todo: una manera de vivir juntos, instituciones, una manera de ser y de conocer.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica, 2013.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI BUSSI, M. G.; DE VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education,* 2016, *48* (5), 691–719. DOI: 10.1007/s11858-016-0796-6.

SINCLAIR, N.; YERUSHALMY, M. Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. En: Ángel Gutiérrez; Gilah C. Leder y Paolo Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 2016 pp. 235–274. SensePublishers, Rotterdam. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_7

SINCLAIR, N.; YURITA, V. To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education,* 2008, *10* (2), 135–150. doi: 10.1080/14794800802233670

SORIA GUZMÁN, I. Ética hacker, seguridad y vigilancia. México: Universidad del Claustro de Sor Juana, 2016. ISBN: 987-607-7853-16-9. Disponível em: http://ru.iiec.unam.mx/3463/1/EticaHackerSeguridadVigilancia.pdf

STACEY, P.; HINCHLIFF PEARSON, S. *Made With Creative Commons.* Copenhagen, Dinamarca: Ctrl+Alt+Delete Books, 2017. Recuperado de: https://creativecommons.org/made-with-cc/.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2005, *10* (1), pp. 31–47. DOI: 10.1007/s10758-004-6999-x.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education,* 1995, *10* (1): 77–101.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Maria Ivete Basniak

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná, Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Estadual do Paraná. Realizou estágio pós-doutoral no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Atuou na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos, Educação Profissional e formação continuada de professores em tecnologias na educação como coordenadora pedagógica da Coordenação Regional de Tecnologia na Educação. Atualmente é professora Adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória e professora permanente e atual coordenadora adjunta do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Líder do Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística (GEPTEmatE).
E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

Sergio Rubio-Pizzorno

Doutorando em Ciências na Especialidad de Matemática Educativa no Centro de Investigación y de Estudios Avanzados - Cinvestav; Mestre em Ciências na Especialidad de Matemática Educativa pelo Cinvestav do México; Licenciado em Educação Matemática e Computação pela Universidad de Santiago do Chile. Desde 2019 é Diretor da genial Comunidad GeoGebra Latinoamericana, e produz e conduz o podcast Aula Aberta (Aula Abierta), um espaço para explorar o digital a partir de uma perspectiva educacional, do Centro de Cultura Digital da Secretaría de Cultura do México. Seus interesses acadêmicos centram-se na Educação Aberta, na Integração Digital para a prática docente, e o estudo do potencial dos Ecossistemas Educacionais Híbridos no desenvolvimento do pensamento matemático.
E-mail: sergio.rubio@cinvestav.mx

SOBRE OS AUTORES E AS AUTORAS

Daysi Julissa García-Cuéllar

Doutoranda em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, Mestra em Ensino de Matemática pela *Pontificia Universidad Católica del Perú* - PUCP. Licenciada na especialidade de Matemática-Física pelo *Instituto Pedagógico Nacional Monterrico* - IPNM. Bacharel em Educação pela *Universidad del Sagrado Corazón* - UNIFE. Conta com especializações em Neuropsicopedagogia e processos cognitivos, Gestão da formação e capacitação, Didática de matemática, Ensino de matemática, Docência em Matemática e em Tecnologias da Informação e Comunicação para a Educação. Atualmente é membro do *Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas* IREM – PUCP, do *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* – CLAME, e faz parte da coordenação acadêmica da *Comunidad GeoGebra Latioamericana*.
E-mail: daysigarcu@gmail.com

Everton José Goldoni Estevam

Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL, Mestre em Educação e Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP. Professor Adjunto do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR, campus de Campo Mourão, e professor permanente e atual coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Líder do Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística (GEPTEmatE). Investiga Formação de Professores que Ensinam Matemática, Práticas pedagógicas e formativas, e Educação Estatística, sendo membro do GT12 da SBEM - Ensino de Probabilidade e Estatística.
E-mail: evertonjgestevam@gmail.com

Gisela Montiel Espinosa

Doutora em Ciências em *Matemática Educativa* pelo *Instituto Politécnico Nacional - IPN,* Mestra em Ciências com especialidade em *Matemática Educativa* pelo *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados*, e Licenciada em Matemática Aplicada e Computação pela *Universidad Nacional Autónoma* do México. Pesquisadora adjunta e Coordenadora Acadêmica do *Departamento de Matemática Educativa* do *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados*

del IPN. Nível I do *Sistema Nacional de Investigadores* do Conacyt, no México. Editora Associada da *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* e membro ativo do *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa* no México. Atualmente trabalha com as linhas de geração e aplicação de conhecimento sobre *Construcción social del pensamiento matemático, Entornos tecnológicos de aprendizaje de las matemáticas* y *Fundamentos, Historia y Epistemología de las Matemáticas.*
E-mail: gmontiele@cinvestav.mx

Humberto Bortolossi

Doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Mestre em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Licenciado em Matemática com Láurea Acadêmica pela Universidade Estadual de Maringá. É professor Associado I da Universidade Federal Fluminense e professor bolsista do CEDERJ, atuando em cursos de graduação (presencial e à distância), especialização e mestrado profissional, atuando na formação de professores de Matemática. É coordenador do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, membro do Conselho Diretor da Sociedade Brasileira de Matemática e membro da equipe do Projeto Um Livro Aberto. Tem experiência na concepção e programação de objetos de aprendizagem digitais para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Atualmente é coordenador da Residência Pedagógica para o núcleo presencial interdisciplinar em Física e Matemática. Tem se dedicado à questão do ensino de Matemática e Estatística com o uso de recursos computacionais e à concepção de livros didáticos para o Ensino Médio.
E-mail: humbertobortolossi@id.uff.br

Irene Victoria Sánchez-N.

Mestra em Matemática com menção Docência pela Universidade do Zulia na cidade de Maracaibo (Venezuela), com Licenciatura em Educação menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi professora da área de Ciências Básicas e atualmente é Acadêmica da Universidade Arturo Prat (Chile) e Coordenadora de Pesquisa da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados à formação de professores em matemática, ensino e aprendizagem de matemática e educação matemática e tecnologia digital.
E-mail: irenorono@gmail.com

Ivonne C. Sánchez-S.

Mestra em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará na cidade de Belém (Brasil), com Licenciatura em Educação - menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi Professora de Matemática e Física na Escola Técnica Industrial *Capitán Anselmo Belloso Chacín,* e atualmente é a Coordenadora Administrativa da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados para a formação de professores em matemática e o uso de tecnologias digitais para o ensino da geometria.
E-mail: ivonne.1812.@gmail.com

Jesús Victoria Flores Salazar

Doutora e pós-doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Brasil. Professora associada do *Departamento de Ciencias/Sección matemáticas y directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas da Pontificia Universidad Católica del Perú*. Coordenadora da linha *Tecnologías y Visualización en Educación Matemática* - TecVEM-PUCP. Membro dos grupos de pesquisa DIMAT/PUCP; PEA-MAT/PUC-SP e do *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* - CLAME. Linha de pesquisa: Tecnologias digitais. Áreas: *mediación de la tecnología en el Trabajo Matemático y en la modelización matemática*. Formação continuada de professores com integração de tecnologias. Pesquisadora Renacyt (María Rostworowski, nível: I).
E-mail: jvflores@pucp.pe

Juan Luis Prieto G.

Mestre em Novas Tecnologias Aplicadas à Educação na Universidade Autônoma de Barcelona, na cidade de Bellaterra (Espanha), com Licenciatura em Educação - menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia, na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi Professor Associado da Universidade do Zulia e atualmente é o Coordenador Geral da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados para a formação de professores de matemática, didática da geometria e uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de matemática.
E-mail: juanl.prietog@gmail.com

Luis Andrés Castillo B.

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará na cidade de Belém (Brasil), com Licenciatura em Educação - menção

Matemática e Física pela Universidade do Zulia na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi Professor do Colégio Bolivariano *Hugo Montiel Moreno,* e atualmente é Coordenador de Tecnologias Digitais e Suporte da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados para a formação de professores em matemática e uso de tecnologias digitais para o ensino da geometria.
E-mail: luiscastleb@gmail.com

Maria Ivete Basniak

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná, Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Estadual do Paraná. Realizou estágio pós-doutoral no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Atuou na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos, Educação Profissional e formação continuada de professores em tecnologias na educação como coordenadora pedagógica da Coordenação Regional de Tecnologia na Educação. Atualmente é professora Adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória e professora permanente e atual coordenadora adjunta do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Líder do Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística (GEPTEmatE).
E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

Rafael Enrique Gutiérrez Araujo

Mestre em Ensino e História das Ciências e Matemática pela Universidade Federal do ABC na cidade de Santo André (Brasil), com Licenciatura em Educação - menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia, na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi Professor Contratado do Ministério do Poder Popular para a Educação da República Bolivariana da Venezuela e atualmente é o Coordenador de Formação da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados para a formação de professores de matemática, saberes docentes e tecnologias digitais para o ensino de geometria.
E-mail: rafael.gutierrez0593@gmail.com

Sergio Rubio-Pizzorno

Doutorando em Ciências na *Especialidad de Matemática Educativa* no *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados* - Cinvestav; Mestre em Ciências na *Especialidad de Matemática Educativa* pelo Cinvestav do México; Licenciado

em Educação Matemática e Computação pela *Universidad de Santiago* do Chile. Desde 2019 é Diretor da genial *Comunidad GeoGebra Latinoamericana*, e produz e conduz o podcast Aula Aberta (*Aula Abierta*), um espaço para explorar o digital a partir de uma perspectiva educacional, do *Centro de Cultura Digital* da *Secretaría de Cultura* do México. Seus interesses acadêmicos centram-se na Educação Aberta, na Integração Digital para a prática docente, e o estudo do potencial dos Ecossistemas Educacionais Híbridos no desenvolvimento do pensamento matemático.
E-mail: sergio.rubio@cinvestav.mx

Stephanie Díaz-Urdaneta

Mestra em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Paraná na cidade de Curitiba (Brasil), com Licenciatura em Educação - menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia na cidade de Maracaibo (Venezuela). Foi Professora Contratada pelo Ministério do Poder Popular para a Educação da República Bolivariana da Venezuela e Professora da Escola Particular *Batalla de Araure*. Atualmente é Secretária da Associação *Aprender en Red* (Venezuela). Seus interesses de pesquisa estão direcionados para a formação de professores em matemática e uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da matemática.
E-mail: stephaniediazurdaneta@gmail.com

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EN INVESTIGACIONES QUE INVOLUCRAN TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA:

EL GEOGEBRA EN FOCO

Agradecimiento al Consejo Nacional de Desarrollo Cientifico y Tecnologico (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) por el apoyo financiero recibido.

PREFACIO

Escribir el prefacio de una obra es siempre un honor, una alegría y un desafío. Este último sobre todo por permitir, a quien lo hace, una libertad de escrita y un viaje por entrelineas suscitadas con la lectura de la obra.

Fruto de un proyecto de investigación financiado por el CNPq (Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, de Brasil), este libro reúne estudios realizados en América Latina, impulsando el desarrollo de corrientes teóricas que puedan se aproximar de la realidad de cada país – Brasil, México, Perú y Venezuela – aquí representado. Es más una obra para la difusión del GeoGebra en la Educación Matemática.

Para quien se dedica a investigación académica, algunas preguntas se repiten, entre ellas: ¿Cuál tecnología utilizar? ¿Con cuál teoría? ¿Cuál abordaje metodológico? Posiblemente la mayor dificultad para contestarlas sea el facto de no ser posible responderlas aisladamente. Quizás un positivista lo haga fácilmente. No pienso que un educador matemático brasileño tenga respuestas específicas y sencillas para cada uno de eses cuestionamientos. Nuestra comunidad científica, por su propia constitución y naturaleza de nuestra área, ha superado lo bastante a eses reduccionismos[25]. La Educación Matemática es un área que produce conocimiento dialogando con las Ciencias Exactas y con las Humanidades.

Tecnología es una creación humana, social. Los humanos son seres políticos, y TODOS poseen ideologías. Asumir no tener ideología

25 Como ejemplo, en el *e-Book titulado Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática* (*Coleção SBEM, volume 13, 2018*, em portugués) usted, socio(a) de la da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, podrá ver la riqueza de posibilidades.

ya es una de ellas. Nuestras visiones de mundo son constituidas en los diferentes contextos sociales de los cuales hacemos parte. Por lo tanto, este libro constituye más una obra que permite al (futuro) investigador en educación matemática reflejar sobre cuestiones inherentes a la integración de tecnologías digitales en su práctica de investigación y/o de enseñanza.

Investigar es una acción humana, social, política, creadora, dinámica, simbólica. Es una acción que considera el contexto en el cual los significados sociales son constituidos por sus protagonistas. Investigación no se efectiva solamente por medio de una lista de procedimientos y de recursos que deben ser aplicados. Y, en una investigación, las interacciones no ocurren con los sujetos actuando de manera igual.

Investigación, tecnología e innovación caminan conjuntamente y son imprescindibles en el desarrollo de una nación. Sin embargo, ni toda innovación es procedente de una investigación. Una investigación no es planeada para producir resultados esperados por el investigador. Tampoco es una acción direccionada para circunstancias puntuales, específicas, como tiende a ocurrir en una innovación. Son las sorpresas, las contra intuiciones que deben despertar la mirada y el caminar de investigadores. Esas inquietaciones se quedan legitimadas por medio de problemática y revisión de literatura debidamente adensadas. Revisión de literatura que también necesita ser continuamente revisitada y actualizada.

No es lo mismo afirmar que un *software* es una herramienta o que es un ambiente. No se trata solamente de un cambio de palabras. Hay una semántica mucho más rica, que instiga y que debe ser teorizada. En el ambiente académico y en la práctica de investigación, es el *locus* propicio para esa problematización.

GeoGebra se ha transformado en más que un *software*. Su desarrollo y mejoramiento se van quedando efectivos gracias a su comunidad global de usuarios y desarrolladores. Con ese carácter abierto, gratuito y comunitario, vemos el enriquecimiento de la relación entre diversas áreas matemáticas, como Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Estadística, Geometría, entre otras.

Al escribir el prefacio de una obra que permite esas reflexiones en el ámbito de la investigación en Educación Matemática con tecnologías digitales, reitero la invitación para innovar en los medios de producción de datos. El momento actual de la pandemia, a pesar de muy difícil, nos tiene habituado, aún que forzadamente, a constituir formas diferentes de encuentros y comunicaciones científicas. ¡Que ellas no sean apenas aprovechadas por los mercenarios de la Educación! Que nosotros, educadores matemáticos, sigamos defendiendo el proceso educativo de cualidad para todas y para todos, sobre todo en las Instituciones públicas de enseñanza y de investigación, y con cualquier tecnología.

Que usted aprecie la lectura desde del que brasileños, chilenos, peruanos y venezolanos nos escriben. *¡Hasta la vista!*

Marcelo Almeida Bairral

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

PRESENTACIÓN

En sus comienzos, el software libre GeoGebra estaba diseñado para trabajar con elementos de la geometría analítica, es decir, trazar gráficamente circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas para obtener, de manera simultánea, su expresión analítica, y viceversa. De esta primera etapa del software proviene su nombre, el cual está compuesto por las palabras en alemán *Geometrie* y *Algebra*, que calza con las palabras en portugués y en español: *GEO*metría + ál*GEBRA*.

Actualmente GeoGebra es mucho más que un software para trazar cónicas. Gracias a su comunidad global de usuarios y desarrolladores, se ha convertido en un potente y versátil software de *matemáticas dinámicas,* ya que con él se pueden trabajar diversas áreas matemáticas, tales como álgebra, cálculo diferencial e integral, estadística descriptiva e inferencial, probabilidad, geometría euclidiana, afín, analítica, del espacio, entre otras. El aspecto dinámico del software viene dado por la posibilidad de interactuar con los objetos matemáticos de manera dinámica, es decir, siendo posible modificarlos de manera continua y en tiempo real. Además, esta modificación afecta a todas las representaciones del objeto matemático, cuya aprensión involucra considerar su característica de multirepresentación dinámica de GeoGebra.

Debido a estas características y a que es un software libre, GeoGebra ha sido abrazado por una comunidad global de usuarios y desarrolladores, entre los que se encuentran principalmente profesores, estudiantes e investigadores educativos, quienes en conjunto conforman la comunidad educativa abierta de GeoGebra. Esta comunidad se ha apropiado del software, lo cual le ha dado un gran impulso, por ejemplo, al disponer de un repositorio en línea que cuenta con más de un millón de recursos educativos abiertos elaborados con GeoGebra, los cuales han sido diseñados prácticamente en su totalidad por los miembros de la comunidad. Esto hace suponer que tales recursos son construidos con el propósito principal de ser implementados en las instituciones educativas por parte de los profesores con sus estudiantes.

Además de la creación de recursos y su implementación, los miembros de la comunidad GeoGebra también han realizado investigaciones sobre el uso educativo de GeoGebra en diferentes niveles educativos, con diferentes contenidos matemáticos, en diferentes países, con diferentes marcos teóricos y metodologías. Centrándonos en América Latina, se destacan ejemplos que dan cuenta del avance en la investigación educativa sobre el uso de GeoGebra, tales como los más de 100 artículos publicados en revistas latinoamericanas que aparecen al buscar la palabra GeoGebra en el *Sistema de Información Científica de acceso abierto: Redalyc*; o el grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital* -cuyo coordinador es Sergio Rubio-Pizzorno- que se realiza cada año en el evento académico *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. En este grupo se discute sobre los aportes de GeoGebra a la región desde diferentes perspectivas como, por ejemplo: visibilización y articulación de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, recursos educativos abiertos integrando prácticas y tecnologías digitales con GeoGebra, y proyectos de alcance regional realizados por la Comunidad GeoGebra Latinoamericana.

Los autores y las autoras de la edición de 2018 del grupo de discusión comenzaron a reconocer la importancia de reflexionar sobre las investigaciones que se realizan en América Latina sobre el uso educativo de GeoGebra, para dar cuenta de los aportes realizados desde y para la región. Ello se presenta como importante, dadas las condiciones educativas particulares de América Latina, que la distinguen de otras latitudes del mundo con mayores recursos económicos y cobertura. De esta manera y por iniciativa de Maria Ivete Basniak, las y los autores del grupo de discusión en su edición 2018 comenzaron una colaboración académica, la cual se institucionalizó por medio del Proyecto de Investigación internacional titulado *La construcción de animaciones y simuladores en el software GeoGebra y la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas,* aprobado y financiado por el CNPq (Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, de Brasil). El Proyecto tiene como objetivo investigar el potencial de la construcción de animaciones y simuladores en el software GeoGebra, para enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los sistemas educativos de diferentes países de América Latina.

Uno de los productos del Proyecto es la escritura del presente libro por parte de los miembros del grupo de discusión Matemática Educativa en la Era Digital edición 2018, centrándose específicamente en dar a conocer aportes teóricos a la investigación del uso educativo de GeoGebra realizados en América Latina. De esta manera, fue natural que los miembros del Proyecto de Investigación internacional dieran cuenta de los diferentes fundamentos teóricos en los cuales basan sus investigaciones en Educación Matemática con GeoGebra. Por lo que el presente libro es resultado de la necesidad de dar cuenta de los aportes teóricos que se están realizando desde América Latina a la investigación en Educación Matemática con GeoGebra, tales como:

1. Apropiación de teorías ya existentes que han sido adaptadas para su uso en las condiciones propias de los países de América Latina.

2. Articulación con perspectivas teóricas de otras disciplinas, como la neurociencia y la psicología.

3. Propuesta original de fundamentos teóricos para la valoración del uso educativo de tecnologías de diferentes naturalezas.

En el primer capítulo, titulado *Contribuciones de la Teoría de la Objetivación al estudio del aprendizaje geométrico en contextos de Elaboración de Simuladores con GeoGebra,* las y los autores Juan Luis Prieto G., Rafael Enrique Gutiérrez Araujo, Irene Victoria Sánchez-N., Stephanie Díaz-Urdaneta, Ivonne C. Sánchez-S. y Luis Andrés Castillo B. (todas y todos miembros de la Asociación *Aprender en Red*), discuten el uso de algunos principios de la *Teoría de la Objetivación* para analizar el aprendizaje geométrico producido en contextos de Elaboración de Simuladores con GeoGebra, destacando el rol que juga el referido software en la producción de ese tipo de aprendizaje.

En el segundo capítulo titulado *Aproximación Instrumental: sus orígenes y su desarrollo en Perú*, sus autores Daysi Julissa García-Cuéllar y Jesús Victoria Flores Salazar presentan y discuten algunos elementos de la Aproximación Instrumental, centradas en la noción de esquemas y técnicas instrumentadas. Además, presentan algunas investigaciones realizadas en Perú en la línea de Tecnologías y Visualización en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en las cuales la Aproximación Instrumental es el marco teórico para los análisis, y finalmente, presentan reflexiones sobre las perspectivas futuras relacionadas con el desarrollo de esta aproximación.

En el tercer capítulo titulado *La Génesis Documental como aporte teórico-metodológico para investigaciones sobre desarrollo profesional docente y tecnología,* los autores Maria Ivete Basniak (coordinadora del Proyecto de Investigación internacional) y Everton José Goldoni Estevam presentan las bases teóricas de la Génesis Documental y discuten como esta teoría puede constituir aporte teórico-metodológico para las investigaciones sobre conocimiento y práctica profesional de profesores que enseñan Matemáticas. Para aclarar aspectos de la Génesis Documental, las discusiones son complementadas con extractos de experiencias y discusiones realizadas en un contexto de un grupo de estudios de profesores, orientado desde 2013 hasta los días de hoy por la perspectiva de Comunidades de Práctica de profesores que enseñan las matemáticas como contexto de formación profesional.

En el cuarto capítulo titulado *Movimientos, Pensamientos y GeoGebra: Algunos Aspectos Neurocientíficos en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* Humberto José Bortolossi discute, desde una perspectiva de la Neurociencia y de la Psicología, el importante rol que juga el movimiento en el contexto de enseñanza y aprendizaje, a través de dos actividades elaboradas en GeoGebra con base en estas teorías, las cuales fueron implementadas en una asignatura de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Federal Fluminense. Parte de la premisa de que GeoGebra es conocido por ser un software de geometría dinámica, que se refiere a la capacidad del aplicativo en traer movimiento a las construcciones, diferentemente del que ocurre con regla y compás usuales, es posible generar una variedad de ejemplos de una misma situación geométrica.

En el quinto capítulo - que cierra este libro- titulado *Ecosistemas Educativos Híbridos en la investigación en Educación Matemática*, Sergio Rubio-Pizzorno y Gisela Montiel Espinosa discuten una nueva tendencia de investigación con tecnologías en Educación Matemática que lleva a nos preguntarnos sobre el valor pragmático y epistémico de todas las tecnologías. Con base en aportes de la antropología, sociología e investigación educativa, se considera a las tecnologías digitales como una construcción social, las cuales, de manera natural, forman parte de nuestros ecosistemas educativos. Atendiendo a las diferentes naturalezas de tales tecnologías, es posible reconocer que ellas ayudan a constituir ecosistemas educativos híbridos.

A partir de este reconocimiento se propone aprovechar, por una parte, el potencial pragmático y epistémico de cada tecnología utilizada con propósito educativo; y, por otra parte, el uso articulado de las tecnologías. A la luz de esta propuesta, GeoGebra se presenta como un importante exponente, debido a la versatilidad del software y a las herramientas de autor, que permiten elaborar recursos educativos abiertos donde es posible integrar tecnologías de diferentes naturalezas.

En definitivo, y a la luz de los capítulos que lo componen, este libro se presenta al lector como una muestra del serio y responsable trabajo académico realizado en América Latina, lo cual ha impulsado el desarrollo de diversas corrientes teóricas que se presentan como explicaciones que intentan ser lo más cercanas y sensibles a la realidad de los contextos locales de los países latinoamericanos. Así también, el presente libro pretende ser un aporte a la difusión del software libre GeoGebra en la Educación Matemática de nuestra región, para aprovechar su carácter abierto y comunitario.

¡Les deseamos una buena lectura!

Maria Ivete Basniak
Sergio Rubio-Pizzorno

Paraná, Brasil y Ciudad de México, México
2020

1

Juan Luis Prieto G.
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo
Irene Victoria Sánchez-N.
Stephanie Díaz-Urdaneta
Ivonne C. Sánchez-S.
Luis Andrés Castillo B.

CONTRIBUCIONES DE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN AL ESTUDIO DEL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO EN CONTEXTOS DE ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.175-196

INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos cómo la Asociación *Aprender em Red* ha venido utilizando principios proporcionados por la Teoría de la Objetivación - TO (RADFORD, 2020) para analizar el aprendizaje geométrico producido en contextos de Elaboración de Simuladores con GeoGebra (ESG), realzando el rol que juega el GeoGebra en la producción de este tipo de aprendizaje. Para ello, primeramente, discutimos cómo nos hemos aproximado a la TO y, en consecuencia, la hemos tomado como marco teórico idóneo para nuestros propósitos e intereses de investigación.

Con respeto a ello, en 2013 iniciamos en Venezuela un proyecto socioeducativo llamado Proyecto Club GeoGebra[26], orientado a alumnos de Educación Media[27] del Estado Zulia (oeste del país). Los *Clubes GeoGebra* se conciben como espacios no convencionales de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y de la Física, en que alumnos y profesores (tanto en servicio como en formación inicial) se dedican a elaborar, con el software GeoGebra, simuladores computacionales representando diferentes fenómenos naturales o artificiales de determinados aspectos de la realidad (PRIETO; GUTIÉRREZ, 2015; 2016; 2017). A medida que el proyecto avanzaba, íbamos reconociendo la ESG como un conjunto de actividades educativas no convencionales con potencial para conducir procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría entre profesores y alumnos participantes.

Este reconocimiento se consolidó en el desarrollo de una agenda de investigación acerca de la ESG (PRIETO; DÍAZ-URDANETA,

26 Para más información sobre el proyecto: http://www.aprenderenred.com.ve/clubgeogebra.

27 Nivel de enseñanza escolar equivalente a los Años Finales de la Enseñanza Fundamental (*Anos Finais do Ensino Fundamental*) y Enseñanza Secundaria (*Ensino Médio*) en Brasil.

2019), orientada por preguntas que abarcan diferentes aspectos de esa actividad: i) ¿En qué medida la matemática escolar interviene en la ESG? ii) ¿Cómo es la actividad matemática que sucede en la ESG? iii) ¿Qué y cómo se aprenden matemáticas durante la ESG? iv) ¿Cuáles otros conocimientos son manifestados en la ESG? v) ¿Cuáles saberes son movilizados por los profesores que participan del proyecto cuando conducen las experiencias de ESG de sus alumnos?

De todas esas preguntas que nos han ocupado, en la actualidad estamos realizando estudios enfocados en los procesos de *aprendizaje de las matemáticas* (especialmente en geometría) de los alumnos que participan en la ESG y en el rol que juega el profesor en esos procesos. Sin embargo, a pesar de que hemos realizado anteriormente algunos trabajos relacionados con el aprendizaje en situación de ESG (DÍAZ-URDANETA; PRIETO, 2016; SÁNCHEZ-S.; PRIETO, 2017), todo nuestro esfuerzo investigativo comenzó a tener sentido desde el momento en el cual asumimos el proceso de aprendizaje (el que también es un proceso de enseñanza) como el principal fenómeno de estudio, que podría guiar nuestra comprensión con relación al potencial de la ESG para el aprendizaje de la geometría escolar.

Señalamos que esa actitud con relación a ese enfoque de investigación fue inspirada en la aproximación que tuvimos con una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje de las matemáticas, la cual revisamos en el próximo apartado.

UNA PERSPECTIVA TEÓRICA PARA INTERPRETAR EL APRENDIZAJE DE SABERES GEOMÉTRICOS

En el año 2017 fuimos invitados para participar de un semanario de investigación cuya temática era la introducción a la TO, teoría que actualmente utilizamos como referencial en nuestra investigación. Esta teoría, inspirada en trabajos del filósofo alemán G. W. F. Hegel y su posterior desarrollo por K. Marx y otros filósofos de la tradición dialéctica, como L. Vygotsky y E. Iliénkov, propone un modo de entender el aprendizaje humano como un proceso colectivo, cultural e históricamente ubicado que señala el rol del trabajo social humano, el cuerpo, las emociones y el mundo material (RADFORD, 2018b). Esa manera de entender el aprendizaje se inscribe en una comprensión de la Educación Matemática como un esfuerzo:

> [...] político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas constituidas históricamente y culturalmente, y que contemplan e imaginan nuevas posibilidades de acción y pensamiento (RADFORD, 2018a, p. 73).

La idea de *creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos,* mencionada en la cita anterior, revela uno de los aspectos característicos de la TO: el aprendizaje no se trata sólo de *conocer*, sino de convertirse en *alguien*. Es decir que, para la TO, no es posible que el aprendizaje ocurra si aquel que aprende, más allá de conocer, no se *transforma* (RADFORD, 2017b). No obstante, una de las características fundamentales que definen a esta teoría y que la hacen diferente de otras perspectivas teóricas es la relación que la TO establece entre el profesor y el alumno, una relación ética marcada por la *labor conjunta* que ellos desarrollan. Para la TO, en la labor conjunta,

> [...] los estudiantes no son reducidos a un papel de simples sujetos cognitivos. Ellos no aparecen como sujetos pasivos recibiendo saber o como sujetos autónomos que construyen su propio saber. En la misma línea, los profesores no son reducidos a un papel de agentes tecnológicos y burocráticos – guardianes y ejecutores del currículo. Ellos no aparecen como poseedores de saber que entregan o transmiten saber para los estudiantes directamente o a través de estrategias facilitadoras (RADFORD, 2017a, p. 252, nuestra traducción).

Así, en la labor conjunta de la clase, el aprendizaje y la enseñanza son consideradas

> [...] no como dos actividades separadas, sino como una única y misma actividad: aquella en la cual profesores y estudiantes, a pesar de no hacer las mismas cosas, se empeñan en conjunto, intelectual y emocionalmente, para la producción de lo que llamamos, una obra común (RADFORD, 2017a, p. 252, nuestra traducción).

Como es posible percibir, en la TO son de importancia vital los *procesos* progresivos, personificados, simbólicos, materiales, discursivos, subversivos y afectivos de creación de nuevos individuos, con capacidad de pensar críticamente y posicionarse éticamente ante las cuestiones urgentes de sus comunidades y de su mundo (RADFORD, 2017a). Esos procesos surgen en la labor conjunta, en cuyo desarrollo los individuos se constituyen cuando se encuentran con el otro y con el mundo en las dimensiones conceptual, material y cultural (RADFORD, 2014). En ese sentido, en la TO

> [...] los encuentros de los alumnos con el saber matemático históricamente constituido, materializado en la obra común de los profesores y de los estudiantes, son denominados *procesos de objetivación*. [...] Por medio de esos procesos sociales, materiales, encarnados y semióticos, los estudiantes y los profesores no solo crean y recrean saber, sino que ellos también se coproducen como sujetos en general y como sujetos de la educación, en particular. Más precisamente, ellos producen subjetividades; esto es, individuos singulares en formación. Es por eso que, a partir de esa perspectiva, los procesos de objetivación son al, mismo tiempo, los *procesos de subjetivación* (RADFORD, 2017a, p. 253, nuestra traducción, énfasis añadidos).

Por razones de espacio, en este texto solamente haremos referencia a los procesos de objetivación que caracterizan el aprendizaje de acuerdo con la TO, discutiendo cómo la hemos utilizado en nuestros estudios sobre el aprendizaje geométrico en contextos de ESG. En general, los procesos de objetivación son

> [...] aquellos procesos sociales, colectivos de *toma de conciencia:* toma de conciencia progresiva y crítica, de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, sistema que gradualmente notamos, y que al mismo tiempo dotamos de sentido. Los procesos de objetivación son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no pasivamente, sino por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica (RADFORD, 2020, p. 20, énfasis en el original).

Sobre esta definición, destacamos dos cuestiones. Por una parte, el sistema de pensamiento y acción codificado culturalmente es el *saber* (matemático, científico, artístico, pedagógico, etc.) en sí mismo, que se puede revelar a la conciencia de los individuos mediante su labor conjunta. Por otra parte, durante esa actividad, los profesores y alumnos recurren a *signos* (palabras, gestos, inscripciones de todo tipo, etc.) y *artefactos* (calculadora, computadora, software de aplicación, etc.) portadores de determinadas *conceptualidades* que afectan los significados producidos en el aula, "al sugerir formas definidas de acción y reflexión, y líneas potenciales de desarrollo cognitivo y social" (RADFORD, 2014, p. 414, nuestra traducción). En otras palabras, a través de la labor conjunta, los signos y artefactos culturales pueden revelar el contenido conceptual que la actividad humana ha depositado en ellos. Radford (2003) se refiere a esos signos y artefactos como *medios semióticos de objetivación*.

Tomando en cuenta el objetivo de este texto, en el apartado siguiente profundizamos el papel que juegan los medios semióticos debido a la importancia que éstos poseen en el desarrollo de la actividad matemática de la clase. Destacamos especialmente al *software* GeoGebra como *artefacto* principal de las actividades de ESG.

EL *SOFTWARE* GEOGEBRA COMO ARTEFACTO CULTURAL

En líneas generales, Martos y Martos (2014) definen artefacto como cualquier objeto que es producto del ingenio humano, sin características prestablecidas, producido para satisfacer las necesidades de determinada cultura humana. En el ámbito educativo y como parte de su trabajo profesional, los profesores utilizan una diversidad de artefactos en la actividad de la clase, entre los cuales es posible mencionar aquellos que han sido predominantes históricamente, como el papel, lápiz, libros, pizarras, entre otros. La función que poseen los artefactos en la actividad de la clase se orienta hacia la medición de la relación profesor-alumno o de la relación alumno-saber (RADFORD, 2020). Particularmente, en la mediación de la relación alumno-saber subyace una visión de la enseñanza y del aprendizaje que determina la manera cómo los individuos utilizan los artefactos en la actividad que ocurre en esos contextos (RICKENMANN, 2006).

En lo que respecta a la actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se destaca una visión histórico-cultural de aprendizaje que concibe los artefactos como partes constitutivas e intrínsecas del pensamiento, y no como simples ayudas (RADFORD, 2006). De esa manera, la forma cómo los alumnos hacen de los saberes matemáticos objetos de su conciencia está íntimamente ligada con los artefactos utilizados, de allí que surja la idea de que esas herramientas cambian y transforman la forma en la que se aprende (BORBA; VILLARREAL, 2005; HOYLES, 2018; VILLARREAL, 2012).

Un tipo de artefacto que ha sido utilizado desde hace más de tres décadas, en el campo de la Educación Matemática, son los Artefactos Digitales - AD, los cuales se caracterizan por su producción artificial e intelectual, así como la posibilidad de interacción con el usuario. Un AD que desde su origen fue pensado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el GeoGebra (HOHENWARTER, 2017), un software de matemática dinámica que ha sido ampliamente incorporado tanto en las actividades matemáticas de la clase como en actividades de investigación, quizás por su valor pragmático (ARTIGUE, 2002). Con respeto a ese software, el estudio de Sánchez-S. y Prieto (2019) muestra que el GeoGebra posee una variedad de herramientas (de construcción y medida) y funcionalidades, que son portadoras de conceptualidades que revelan los saberes matemáticos y geométricos que han sido constituidos por la humanidad a lo largo de la historia. Así, podemos afirmar que el GeoGebra es un artefacto cultural con inteligencia histórica en él incorporada (RADFORD, 2006).

Por ejemplo, pensemos en dibujar un rectángulo en la aplicación *Geometría* del software GeoGebra. La herramienta *Polígono* sugiere al usuario una forma de construcción de esa figura para la cual se debe informar al software cuáles son los vértices que le definen (Figura 1). De esta manera, la herramienta *Polígono* es portadora de una conceptualidad particular, que es posible materializar en la construcción del rectángulo. Además de ello, tal y como sugiere la Figura 1, cada herramienta y funcionalidad del GeoGebra posee determinadas demandas en la forma de condiciones que el usuario debe proporcionar al software, condiciones que, señalamos, no son neutras ni ingenuas, pero son parte fundamental del saber matemático depositado en esas herramientas (SANDOVAL; MORENO-ARMELLA, 2012).

Figura 1 – Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente

Fuente: Elaboración propia.

De lo anterior, asumimos que el uso deliberado de las herramientas y funcionalidades del GeoGebra puede afectar el significado de los contenidos conceptuales que portan esos recursos en el desarrollo de la labor conjunta en la clase. Así, por la importancia que la TO concede al trabajo con artefactos, se puede concluir que la cultura material interviene en los procesos de objetivación y ayuda a que éstos puedan materializarse. Sin embargo, debido a que los artefactos (como el software GeoGebra) no pueden revelar por sí mismos la conceptualidad que el trabajo humano ha depositado en ellos, es necesario que la cultura intelectual y material sea integrada a la labor conjunta que profesores y alumnos despliegan en la clase, con la intención de hacer aparente los saberes que portan los artefactos utilizados.

UN EJEMPLO DE PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN LA ESG

Para ilustrar la manera en la que la conceptualidad que portan algunas herramientas de construcción del GeoGebra puede revelarse a la conciencia, discutimos brevemente el episodio[28] de un profesor (João) y dos alumnos (Simão y Edmilson) que, en el contexto de una experiencia de ESG, buscan comprender la técnica de construcción de un círculo con el GeoGebra (Tabla 1), utilizada por estos alumnos anteriormente. En ese contexto se revelan procesos de objetivación producidos durante el trabajo práctico de comunicación, que giran alrededor de una manera geométrica de entender la rotación

28 Por episodio nos referimos a un fragmento de la actividad en el que se revela un proceso de objetivación. El episodio presentado en este trabajo está compuesto por una secuencia de líneas indicadas por números, y que contienen las frases de los participantes en la actividad e imágenes que complementan los signos evocados por ellos. Las líneas del episodio reportado van desde la 40 hasta la 58.

(conceptualidad) que se encuentra incrustada en la herramienta del GeoGebra *Rotación*.

Tabla 1 - Técnica de construcción del círculo aplicada por los alumnos

Pasos	*Acciones*
1. Determinar el centro del círculo	*1. Fue trazada una recta a paralela al eje x por el punto C.* *2. Fue rotada la recta a con centro en C, con un ángulo de 42.6° y en sentido antihorario, obteniendo la recta a'.* *3. Fue creado el deslizador α, con valores mínimo y máximo de 0° y 65°, respectivamente.* *4. Fue rotada la recta a' con centro en C, con un ángulo α y en sentido horario, obteniendo la reta a''.* *5. Fue trazada una circunferencia centrada en C y de radio 21*k, obteniendo la circunferencia b.* *6. Fue interceptada la reta a'' y la circunferencia b, obteniendo el punto D, centro del círculo.*
2. Definir el radio del círculo	*1. Fue tomada la medida k como el radio del círculo.*
3. Trazar la circunferencia del círculo	*1. Fue trazada la circunferencia del círculo, centrada en D y de radio igual a k, obteniendo la curva d.*
4. Ilustrar el círculo	*1. Fue modificada la opacidad de la circunferencia del círculo para ilustrar la región interna.*

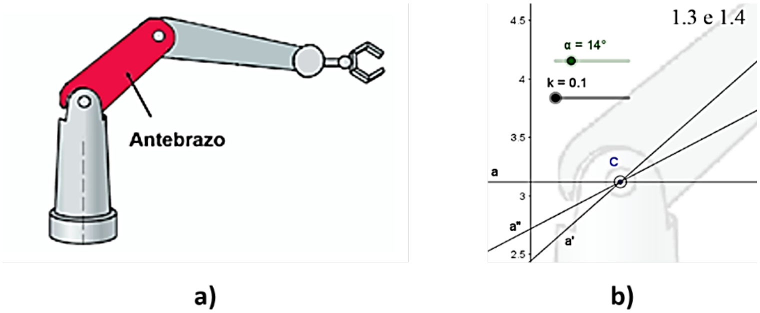
Fuente: Elaboración propia.

Para usar la herramienta *Rotación* es necesario comunicar al software los tres elementos (condiciones) característicos de esa transformación geométrica: *objeto a rotar, centro de rotación* y *amplitud del ángulo*. Sobre la amplitud del ángulo, su valor es insertado por medio de un campo de entrada que aparece después de haber seleccionado los otros elementos. La amplitud del ángulo se puede expresar como medida (número) o como variable (letra), según sea definida su construcción. Para cualquier opción, las formas de expresar la amplitud del ángulo llevan a maneras diferentes de entender esa transformación en el software GeoGebra.

En el caso que describimos aquí, determinados procesos de objetivación ocurrieron cuando João, Simão y Edmilson discutieron las acciones de la técnica de construcción del círculo que involucraron el uso de la herramienta *Rotación* (acciones 1.2 y 1.4, Tabla 1), revelándose progresivamente la conceptualidad del artefacto. Específicamente, *describimos la forma cómo ellos tomaron conciencia de la idea de rotación con un ángulo expresado como variable*.

Existen dos formas en las que una variable puede representar la amplitud del ángulo de una rotación con el GeoGebra. La primera de ellas ocurre cuando la variable expresa el valor de un ángulo construido previamente en la interfaz del software. La segunda, cuando la variable expresa un rango de medidas angulares representado por un *deslizador*. Identificamos esa segunda forma de representación en nuestro episodio, cuando los alumnos, motivados por la necesidad de representar el movimiento del antebrazo del brazo robótico ilustrado en la Figura 2a, desarrollaron las acciones 1.2 y 1.4. de la técnica (Figura 2b).

Figura 2 - Antebrazo del brazo robótico y rotación de la recta *a*'



Fuente: Elaboración propia.

Debido a que la técnica de construcción fue aplicada mucho antes de la reunión entre João, Simão y Edmilson, los alumnos olvidaron que habían aplicado la rotación (acción 1.4, Tabla 1). Cuando comunicaron a João[29] cómo representaron el antebrazo del brazo robótico en el GeoGebra, vincularon erróneamente el deslizador α (acción 1.3) a la rotación de la recta *a* (acción 1.2) y no a la recta *a*', como realmente fue realizado. Con la finalidad de aclarar esta cuestión, discutimos a continuación, por medio de análisis de extractos de las frases de los participantes (seleccionadas de las transcripciones de grabaciones de vídeo de la reunión), cómo Simão y Edmilson tomaron conciencia tanto de la existencia de la rotación de la acción 1.4, como de la conceptualización de ese objeto geométrico presente en la herramienta *Rotación*, con un ángulo expresado como variable vinculada a un deslizador.

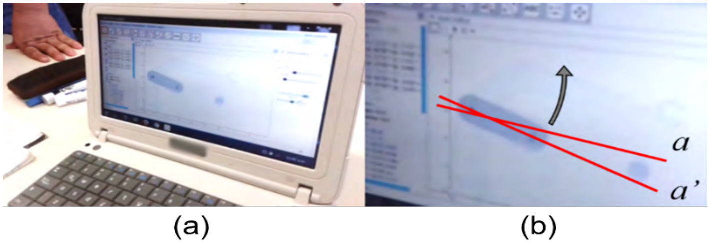
EL RECONOCIMIENTO DE LA ACCIÓN 1.4 DE LA TÉCNICA

La acción 1.4 de la técnica comenzó a ser reconocida cuando João tomó conciencia de la existencia, en el dibujo dinámico[30] de la recta *a*'', ignorada por él hasta aquel momento, con comportamiento distinto a la recta *a*' (acción 1.2), indicada por Edmilson y Simão. En un principio, los alumnos habían declarado que la recta *a*' fue rotada en sentido antihorario con una amplitud del ángulo definida por el deslizador α. Esto reveló una contradicción cuando compararon con el dibujo dinámico, porque para ciertos valores del deslizador, la recta *a*' presentaba coeficiente angular negativo (Figura 3); sin embargo, la amplitud del ángulo de la rotación α variaba entre 0º (posición horizontal) y 65º, en sentido antihorario.

29 En el momento de la reunión, João realizaba una visita al Club GeoGebra en el que Simão y Edmilson participaban. El propósito de la visita de João, como director del proyecto, era conocer y monitorear el trabajo que hasta entonces estaban realizando los alumnos del club.

30 Para efectos de la investigación, el dibujo dinámico es la representación obtenida en la interfaz del GeoGebra que modela las formas y movimientos del antebrazo del brazo robótico.

Figura 3 - Coeficiente angular negativo de la recta *a*' para ciertos valores de α



Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos presentaron dificultades para reconocer esa contradicción solamente observando el dibujo dinámico. Por lo tanto, João produjo otra representación de las acciones descritas por Simão y Edmilson, en la que integró el dibujo en papel al repertorio de recursos semióticos utilizados. Para ello, el profesor desarrolló un discurso oral en el que utilizó el lápiz para indicar, sobre el dibujo en papel, cada uno de los elementos necesarios para la aplicación de la rotación en el caso de la acción 1.2, hasta llegar el momento de interpretar la amplitud del ángulo de rotación en el software GeoGebra (extractos 40 y 41). Su intención fue que los alumnos interpretaran los efectos que deberían producirse cuando la acción 1.2 fuese definida, en función de una amplitud del ángulo de rotación expresada como variable (α) y no como medida, sobre el dibujo dinámico. A partir de la interpretación realizada sobre el dibujo en el papel, João llamó la atención de los alumnos para observar el dibujo dinámico y comparar el comportamiento de la recta *a*', comparando la interpretación expresada por Edmilson en su discurso con el comportamiento observado en el ordenador (extracto 42).

40. João: *Después, ustedes me dicen que dibujaron esta recta de aquí [señala con el lápiz la recta a' (Figura 4)]. ¿Por qué esta recta es importante? Me imagino que es importante porque aquí va a estar el otro punto... la otra circunferencia que ustedes van a dibujar, o el otro círculo, creo. Ajá, pero ¿cómo dibujé esta recta? Ustedes me dijeron "rotando ésta" [se refiere a la recta a]. Bueno, si la roto, yo les entiendo. Pero si ustedes la rotan me deben decir [...].*

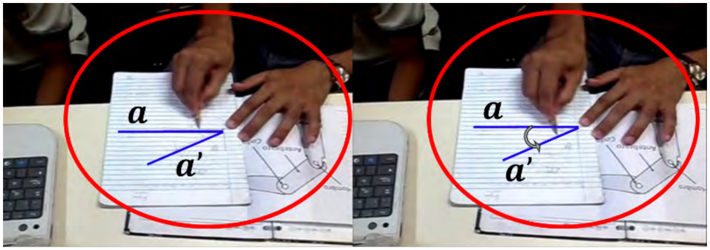
Figura 4 - João señala los elementos necesarios para aplicar la rotación en el GeoGebra

(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

41. João: *Esto es lo que quiero hacerles ver. ¿Cuál es el ángulo aquí? [refiriéndose al dibujo en papel] Ustedes me dijeron: "No profe, el ángulo no es fijo. El ángulo es un deslizador. Usamos un deslizador porque, si lo manipulamos, vamos a lograr que la recta baje y suba, baje y suba, y eso nos conviene". Yo les entiendo. Pero si voy a rotar esto [señala con el lápiz la recta a sobre el dibujo (Figura 5a), desplazando la mano de izquierda a derecha] con respecto [...] en este sentido, en el sentido antihorario, un ángulo , esta recta [a] se mueve desde acá y va a llegar hasta aquí [señala la rotación de la recta a en el papel, usando la punta del lápiz (Figura 5b]. No va a bajar [posarse por debajo del eje x]. Pero yo ahí [refiriéndose a la Vista Gráfica del GeoGebra] estoy viendo que [la recta] baja.*

Figura 5 - João explica a los alumnos la contradicción de lo que fue expresado por ellos

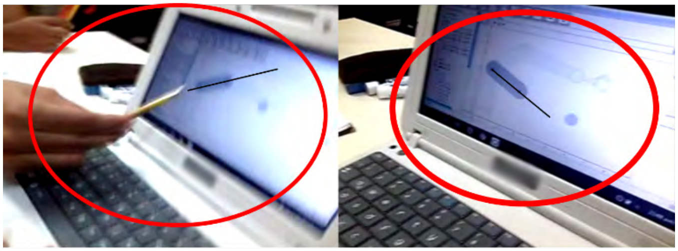


(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

42. João: *Aquí [en la pantalla del ordenador] [...] yo me imagino la recta que está aquí [señalando con el lápiz el dibujo dinámico en la Vista Gráfica del GeoGebra (Figura 6a)]. Fíjense, allí [la recta] llega a ser horizontal, pero después baja (Figura 6b). ¿Qué pasó allí? ¿Cómo era la cuestión [la construcción]? Porque yo no la entendí. ¿No te acuerdas Simão de lo que hiciste?*

Figura 6 - Uso del dibujo dinámico para ilustrar la contradicción discutida



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

Ese uso coordinado de palabras, gestos e inscripciones, tanto en el papel como en el software, dio la oportunidad de reconocer la existencia de *a*'' como una segunda recta presente en la construcción (y que también fue rotada, además de *a*'), en el momento en que Edmilson, por voluntad propia, decidió utilizar la herramienta *Mostrar/ocultar objeto* para dejar visibles todos los objetos construidos hasta el momento (extracto 43). Esa decisión de mostrar todos los elementos de la construcción revela que el alumno empezó a dudar de su discurso (extracto 44), dando posibilidad a João de intervenir (extracto 47). Es importante señalar que, cuando Edmilson hizo uso de la herramienta mencionada, el deslizador tenía valor de 0º; consecuentemente, las rectas *a*' y *a*'' se encontraban superpuestas y no era posible distinguirlas.

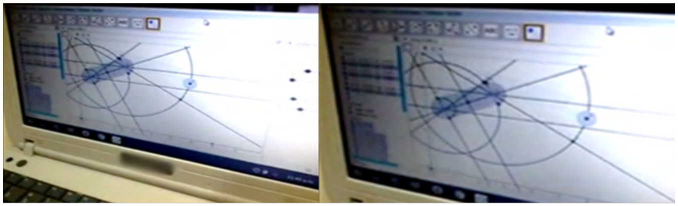
Por ese motivo, João solicitó a Simão que cambiase el valor del deslizador para visualizar mejor las dos rectas, ya que todos los objetos construidos estaban visibles en la pantalla del ordenador (extracto 47). Esa estrategia fue potenciada por el profesor, cuando sugirió el uso de la opción *Animación* del GeoGebra sobre el deslizador α (extractos 48, 49 y 50). Activar esa opción generó la posibilidad para los alumnos de no sólo confirmar la existencia de la recta *a*'' en el dibujo dinámico (como destacó Simão en el extracto 51), sino también de poder reconocer que fue esa recta la que fue rotada, con un ángulo expresado como variable, y no la reta *a*', tal como João enfatizó y como Edmilson reafirmó (extractos 52, 54 y 55), lo que hace evidente la toma de conciencia de la acción 1.4 de la técnica.

43. Simão: *Ubicamos un... [se queda pensativo mientras Edmilson activa la herramienta Mostrar/ocultar objeto].*

44. Edmilson: *A ver, ¿esta recta [se refiere a la recta que sirve de referencia a la rotación], de quién es prima [homóloga]?*

47. João: *[Simão], mueve el deslizador de ángulo por favor. Quiero ver lo que pasa con este deslizador... Ahí [en esa posición] está bien. ¿Ves? Eso es lo que está pasando, me lo temía. Lo que estoy viendo ahí ahorita [en este instante], no lo veía cuando estaba en cero. ¿Qué veo de especial? [dirigiendo la pregunta a los jóvenes]. Ya entendí lo que este chamo [Simão] hizo, con solo mirar eso [refiriéndose al dibujo dinámico en la Vista Gráfica (Figura 7)].*

Figura 7 - Confirmación de la existencia de la recta *a*'' y el origen de su rotación



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

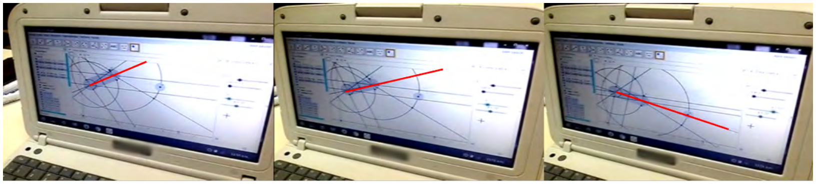
48. João: *[Simão], activa animación a eso [se refiere al deslizador]. Al deslizador.*

49. Simão: *¿Aquí?*

50. João: *Ajá. Animación. Miren... Miren.*

51. Simão: *Es como otra recta. Como si hubiera otra recta allí [se refiere a la recta a'', la cual se mueve a medida que el deslizador toma valores distintos (Figura 8)].*

Figura 8 - Comportamiento de la recta *a*'' en la pantalla del ordenador



(a) (b) (c)

Fuente: Elaboración propia (2010).

52. João: *Exacto, fíjate cómo se mueve esa recta nueva [se refiere a a'']... Porque, realmente, el deslizador no está vinculado con esta recta que ustedes dibujaron aquí [refiriéndose a la recta a'] sino con otra [se refiere a a''].*

54. Edmilson: *Al parecer, esa recta [refiriéndose a a'] se dibujó con un ángulo fijo [se refiere al ángulo de 42,6°], y después... [en ese momento, el alumno fue interrumpido por João].*

55. João: *Y a partir de ésta [refiriéndose a la recta a'], ustedes dibujan la otra recta [la recta a''].*

En ese momento, además de reconocer la existencia de la recta *a*'' en la construcción, los alumnos tomaron conciencia del ángulo de rotación que Simão utilizó para ejecutar la acción 1.2. En otras palabras, el extracto 54 revela que los alumnos reconocen que la recta *a*' fue rotada con un ángulo fijo de 42,6º.

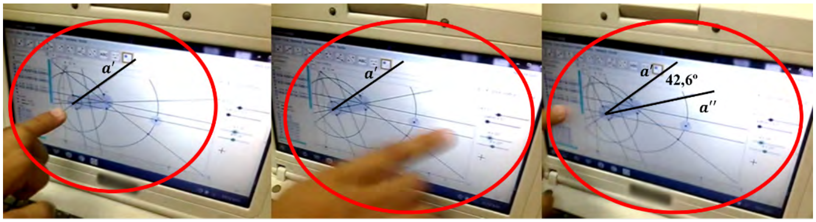
EL RECONOCIMIENTO DE LA CONCEPTUALIDAD DE LA ROTACIÓN APLICADA A LA RECTA A''

Después de reconocer la existencia de la recta *a*'' en el dibujo dinámico, aquella que fue obtenida con una amplitud del ángulo de rotación expresada como variable (α), se desplegó un proceso de significación de la rotación aplicada a esa recta, según la conceptualidad de la cual es portadora la herramienta *Rotación*. En ese proceso, solamente João intervino para finalizar la reunión de trabajo con los alumnos. En ese sentido, João procedió de manera similar a las intervenciones anteriores, buscando interpretar lo que implicó la acción 1.4 de la técnica. En su interpretación, João produjo un discurso que, por medio de la combinación de palabras, gestos y dibujos, se refirió tanto al objeto a rotar como a la amplitud del ángulo de rotación.

Con respeto al objeto a rotar, se destaca que ese elemento corresponde a *a*' y no a la recta *a* (extracto 57). Acerca de la amplitud del ángulo de rotación, João interpretó el rango de valores que definen a α, con énfasis en el valor máximo del deslizador. Después de concluir que ese valor es el doble del ángulo usado en la acción 1.2 de la técnica, el profesor justificó esa afirmación volviendo al dibujo en papel. En aquel momento, él intentó mostrar el conjunto de posiciones posibles de la recta *a*'', desde una posición inicial (la ocupada por *a*' en el dibujo) hasta una posición final (ocupada por la recta que es simétrica a *a*'', con respeto al eje de simetría *a*), de acuerdo con lo observado en la pantalla del ordenador (extracto 58).

57. João: *Y después que él [Simão] creó esta recta [refiriéndose a a' (Figura 9a)], la rota. Pero no rota la [recta] horizontal, rota ésta [señala la recta a' (Figura 9b)]. Y la rota por un ángulo que, me imagino, tendrá una medida máxima igual al doble del ángulo que tenía al principio [se refiere al ángulo de 42,6° (Figura 9c)].*

Figura 9 - Interpretación de la acción 1.4 en la pantalla del ordenador



(a) (b) (c)

Fuente: Elaboración propia.

58. João: *¿Por qué el doble? Porque si ésta mide 41 [señalando con el lápiz el ángulo de 42,6° sobre el papel] y por aquí, abajo [se refiere al espacio por debajo de la recta a] hay 41º más, [el ángulo α] llegará hasta 82º. Me imagino que lo hiciste así [dirigiéndose a Simão].*

CONCLUSIONES

En este texto presentamos cómo hemos utilizado algunos principios teóricos de la TO para analizar el aprendizaje geométrico producido en contextos de ESG. Específicamente, describimos la forma en la que dos alumnos de Educación Media tomaron conciencia de la idea de rotación (conceptualidad de la cual es portadora la herramienta *Rotación* del GeoGebra) mientras comunicaban la técnica de construcción de un círculo. Para ello, colocamos la atención en la labor conjunta desplegada por estos alumnos y su profesor, en la cual una variedad de medios semióticos (signos y artefactos) marcaron los procesos de objetivación reportados.

En la descripción del episodio, el software GeoGebra se constituyó en parte consubstancial de la labor conjunta de los alumnos y el profesor, y consecuentemente, jugó un rol fundamental en el aprendizaje geométrico reportado. Esto se pudo observar en la manera cómo la conceptualidad incrustada en la herramienta *Rotación* afectó los significados de los alumnos con relación a la transformación abordada, puesto que tal conceptualidad sugirió líneas potenciales de reflexión y acción sobre la rotación como objeto geométrico (RADFORD, 2014).

Para finalizar, señalamos también el hecho de que el software haya sido utilizado con diferentes propósitos a lo largo del episodio reportado. Uno de los propósitos de uso fue ampliar el *dominio de funcionamiento del dibujo geométrico* (en la forma de un dibujo dinámico). En efecto, tratándose de un trabajo de construcción realizado en un software de matemática dinámica como el GeoGebra, el dibujo en papel se mostró insuficiente para legitimar algunas acciones de la técnica aplicada. Así, como resultado de esa ampliación, fue posible que los alumnos visualizasen los efectos de haber vinculado el deslizador a la rotación aplicada en la acción 1.2 de la técnica.

Otro propósito de uso del software, vinculado al anterior, está relacionado con las posibilidades de visualización que el GeoGebra ofrece. Así, gracias a la manipulación del dibujo dinámico, fue posible visualizar las diferencias entre los comportamientos de las rectas *a*' y *a*'', mientras la opción *Animación* del software estaba activada.

Este tipo de investigación nos ha permitido tomar conciencia sobre la forma en la que ocurren los procesos de objetivación en actividades propias de elaboración de simuladores con el software GeoGebra. Sin embargo, consideramos que aún es necesario contar con más investigaciones que analicen los procesos de subjetivación que alumnos y profesores desarrollan cuando se comprometen intelectual, emocional y éticamente en la producción de dibujos dinámicos con el software GeoGebra y en la comunicación de las técnicas de construcción que son producidas y utilizadas para tal fin.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer, 2005. v. 39.

DÍAZ-URDANETA, S.; PRIETO, J. L. Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. In: SERRES, Y.; MARTÍNEZ, A.; INOJOSA, M.; GÓMEZ, N. (Orgs.). *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática.* Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT, 2016, p. 445-453.

HOHEMWATER, M. The journey of GeoGebra from desktop computers to smartphone. Madrid: *S. Madrileña Emma Castelnuovo*, 2017. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=aKxvlahlKW8. Accedido a: 24 oct. 2019.

HOYLES, C. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education,* v. 20, n. 3, p. 209-228, 2018.

MARTOS, E.; MARTOS, A. E. Artefactos culturales y alfabetización en la era digital: discusiones conceptuales y praxis educativa. *Teoría de la educación. Revista Interuniversitaria,* v. 26, n. 1, p. 119-135, 2014.

PRIETO, J. L.; DÍAZ-URDANETA, S. Un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* v. 32, n. 1, p. 685-691, 2019.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* Maracaibo: Aprender en Red, 2015.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* 2. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2016.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia.* 3. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2017.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* v. 9, n. especial, p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, v. 85, p. 405-422, 2014.

RADFORD, L. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (Orgs.). *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural.* Campinas, SP: Mercado de letras, 2017a, p. 229-261.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Orgs.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b, p. 139-165.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 12, n. 2, 61-80, 2018a.

RADFORD, L. Conferencia Dr. Luis Radford. 2018b (37m38s). Santiago: *Aprender en Red.* Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Age-EmXa_LI. Accedido a: 06 dic. 2018b.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: TAKECO-GOBARA, S.; RADFORD, L. (Orgs.). *Teoria da Objetivação*: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2020, p. 15-42.

RICKENMANN, R. El rol de los artefactos culturales en la estructuración y gestión de secuencias de enseñanza-aprendizaje. In Conférence invitée, *Actes du 1er simposio internacional de educación y formación docente*, Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia, 2006, p. 1-21.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. El uso experimental del GeoGebra en un contexto de formación docente en matemática. In: ROSAS, A. M. (Org.). *Avances en Matemática Educativa:* Tecnología para la educación, 4 ed. Ciudad de México: Lectorum, 2017, p. 38-51.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* v. 14, n. 1, p. 55-83, 2019.

SANDOVAL, I.; MORENO-ARMELLA, L. Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos,* v. 14, n. 1, p. 21-29, 2012.

VILLARREAL, M. E. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.

2

Daysi Julissa García-Cuéllar
Jesús Victoria Flores Salazar

APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL: SUS ORÍGENES Y SU DESARROLLO EN PERÚ

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.197-218

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la Educación Matemática en Perú se ha ido desarrollando con diversas investigaciones usando diferentes enfoques teóricos, uno de ellos es la Aproximación Instrumental.

En ese sentido, Artigue (2011) presenta el desarrollo y los aportes de la Aproximación Instrumental a la Educación Matemática como teoría necesaria, cuando se interactúa con tecnologías digitales. Explica que a inicios de los años 90's, participó en un proyecto de la Dirección de Tecnología del Ministerio de Educación de Francia. Este proyecto involucró estar a cargo de un grupo de expertos que investigaban el uso de calculadoras y *Computer Assistant System* - CAS en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de secundaria.

La investigadora señala que a partir del contraste entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS con lo que realmente fue observado en las clases surgieron preguntas sobre el verdadero potencial de las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que este fue la primera semilla para lo que después sería la Aproximación Instrumental. Así mismo, en el proyecto que sucedió a este primero y en el que Michele Artigue trabajó con la calculadora simbólica T1-92, se investigó acerca de los conceptos y técnicas menos centradas en el estudiante y más orientadas a la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje. Es en este contexto en que la autora y su equipo de investigadores conectaron la Teoría Antropológica de lo didáctico - TAD con la perspectiva instrumental de la Ergonomía Cognitiva de Rabardel y Vérillon, y de esta conexión entre ambos aspectos teóricos de la Educación Matemática y de la Ergonomía Cognitiva, nace la Aproximación Instrumental. Un esquema que sintetiza esta afirmación se muestra en la figura 1.

Figura 1. Aproximación Instrumental

Teoria Antropológica do Didático

↓

Perspectiva Instrumental

↓

Aproximação Instrumental

Fuente: Elaboración propia.

Así, por parte de la TAD se estableció un marco conceptual que permite enfrentar las necesidades teóricas para realizar un análisis integral de los procesos de aprendizaje, que incluye el papel que tienen las técnicas en las prácticas humanas y el desarrollo conceptual que emerge de ellas. También, por otro lado, la perspectiva instrumental de la ergonomía cognitiva, que es una herramienta teórica que permite investigar el papel que las tecnologías digitales juegan en los procesos de aprendizaje, además comprender los procesos de apropiación de la tecnología digital por parte de los estudiantes.

En ese sentido, Artigue (2011) señala que la unión de la TAD con la perspectiva instrumental de la ergonomía cognitiva resultó ser muy productiva, ya que al realizar una experiencia con estudiantes de nivel secundario que utilizaron la calculadora T1-92 para resolver una tarea sobre funciones, en la que hizo un análisis desde la Aproximación Instrumental, consiguió "comprender mejor las causas de los efectos limitados de los esfuerzos institucionales realizados y cómo pudieran provocarse cambios significativos a futuro" (ARTIGUE, 2011, p. 21). Ello porque identificó el valor epistémico y pragmático de las técnicas cuando se interactúa con tecnología digital.

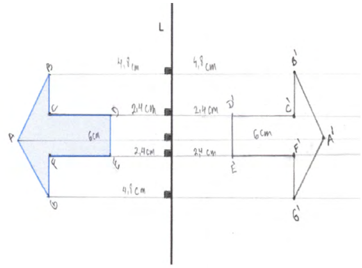
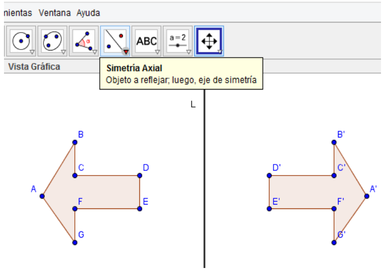
Entendemos por valor epistémico al que permite que el estudiante comprenda la matemática que se moviliza cuando resuelve una tarea, mientras que el valor pragmático está directamente relacionado con la mediación de la tecnología digital para resolverla; es decir, está relacionado con el potencial que tiene esta para ayudar a comprender los objetos involucrados. En palabras de Artigue (2011, p. 21),

> Las tecnologías digitales trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas, equilibrios que se han establecido progresivamente al filo de la historia, en una cultura de lápiz y papel, aunque los cálculos han estado durante todo el tiempo instrumentados por diversas herramientas: ábacos, tablas numéricas, herramientas gráficas, etc. Los sistemas educativos encuentran dificultades evidentes para reaccionar de manera apropiada a estos trastornos. Pero estas dificultades no son independientes de la manera en las que, generalmente, estos sistemas tienden a adaptarse a las evoluciones tecnológicas, sólo viendo a la tecnología como un coadyuvante pedagógico o didáctico.

De lo anterior, podemos decir que las técnicas son diferentes al resolver una tarea con tecnología digital que al resolverla a lápiz y papel. En ese sentido, Artigue (2011) manifestó, en sus investigaciones iniciales con Aproximación Instrumental, la importancia de las técnicas instrumentadas en las clases de matemática, dado que esas técnicas difieren a las técnicas en lápiz y papel. Señaló que había una predisposición orientada al valor pragmático de las técnicas instrumentadas, pero lo que da la legitimidad educativa a una técnica no es sólo su valor pragmático, sino también su valor epistémico, por lo que se busca es una integración que permita un equilibrio entre estos dos valores de las técnicas instrumentadas asociadas a una tarea.

En el ejemplo presentado en la tabla 1, en donde la tarea es trazar el simétrico de una figura dada, se presentan dos técnicas, una con lápiz, papel y regla; y la otra con el uso del GeoGebra. En la técnica con lápiz, papel y regla, se logra observar algunos conocimientos movilizados como perpendicularidad, equidistancia, paralelismo e inclusive que se reconozca y trace cada punto simétrico de los vértices del polígono original; es decir podemos reconocer el valor epistémico de esta técnica. Sin embargo, en la técnica realizada con el GeoGebra no se puede evidenciar ello, dado que la tarea se realizó solo con la herramienta *simetría axial,* y no se observa su valor epistémico, pero el valor pragmático de la técnica con GeoGebra, dado que es más económica en cuanto a pasos o procedimientos que la de lápiz, papel y regla.

Tabla 1 - Técnicas para trazar el simétrico de una figura

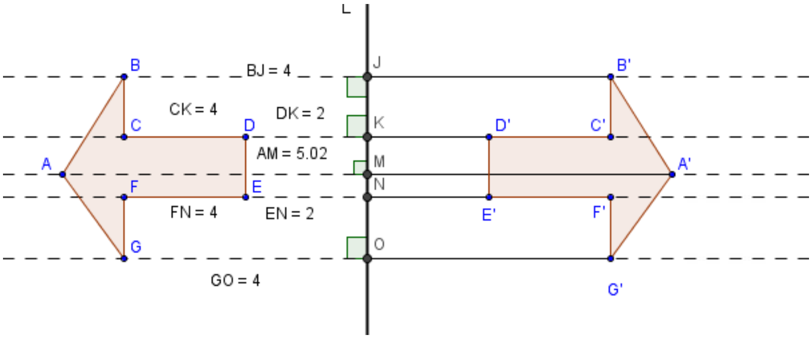
Técnica con lápiz, papel y regla	*Técnica con GeoGebra*
	
Se trazan rectas auxiliares perpendiculares al eje de simetría (recta L) que pasen por cada uno de los puntos de la figura (polígono ABCDEFG). Luego, se trazan los puntos equidistantes al eje de simetría y a los puntos A, B, C, D, E, F y G. Finalmente se traza el simétrico de la figura (polígono A'B'C'D'E'F'G').	*Con la herramienta* Simetría axial*, se da clic al polígono ABCDEFG; luego, clic al eje de simetría (recta L) y se crea el polígono simétrico A'B'C'D'E'F'G'.*

Fuente: Elaboración propia.

Cabe resaltar que en la actualidad la tendencia en el área de Educación Matemática es percibir a la tecnología digital como un medio para la construcción y/o movilización de conceptos matemáticos, lo que realza el valor epistémico de las técnicas, sin dejar de lado su valor pragmático.

En ese sentido, en la figura 2 se muestra una segunda técnica realizada con GeoGebra, en donde se ocultó la herramienta *simetría axial* de la barra de herramientas de dicho software. Al dar solución a la tarea (trazar el simétrico de una figura dada), se trazan rectas perpendiculares al eje de simetría (recta L) que pasen por cada uno de los vértices del polígono ABCDEFG. Luego, con la herramienta *punto de intersección,* se trazan los puntos J, K, M, N y O. Posteriormente, se mide la distancia que existe entre el punto B al punto J dando una medida de 4 cm, lo cual permite trazar el punto B’ midiendo 4 cm desde J sobre la recta que contiene al segmento BJ. Este último procedimiento se realiza para cada uno de los vértices del polígono (puntos A, B, C, D, E, F y G). Finalmente se traza el simétrico de la figura (polígono A’B’C’D’E’F’G’). Esta técnica instrumentada permite evidenciar su valor epistémico, dado que se movilizan rectas perpendiculares, ángulos rectos, equidistancia, segmentos, entre otras nociones matemáticas, como también su valor pragmático, pues medidas como 5.02 cm (medida de AM) serían difíciles de realizar a lápiz, papel y regla, esto quiere decir que permite mediciones con mayor exactitud.

Figura 2. Técnica realizada con el GeoGebra en la cual se ocultó la herramienta simetría Axial



Fuente: Elaboración propia.

A seguir, explicamos algunos elementos importantes de la Aproximación Instrumental, lo que permitirá comprender este enfoque teórico.

APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL

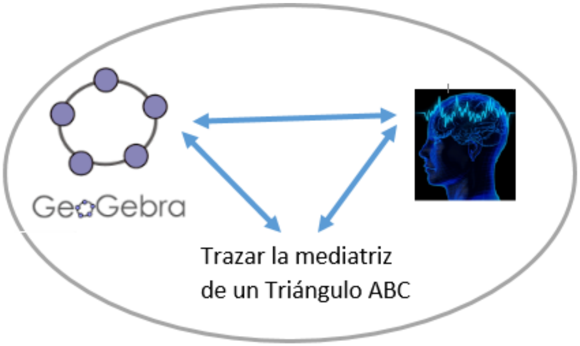
La Aproximación Instrumental - AI permite evidenciar los valores epistémicos y pragmáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediada por la tecnología digital.

Las nociones-clave de la Aproximación Instrumental son las siguientes: *Esquema* - Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de tarea. *Artefacto* - Da sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de una de tarea, este puede ser material o simbólico. *Instrumento* - Es lo que un sujeto construye a partir de su interacción con un artefacto, por ello es una entidad mixta, pues contiene una parte artefactual, que puede ser material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción con el artefacto.

Así, de acuerdo con Rabardel (1995), la perspectiva Instrumental estudia la diferencia que existe entre artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó proceso Génesis Instrumental.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, y señala que el artefacto pasará al estado de instrumento cuando el sujeto desarrolla esquemas de utilización correspondientes. Por ejemplo, en la figura 3, se pide resolver la tarea *Trazar la mediatriz de un triángulo ABC*. En este ejemplo concreto, el artefacto será el GeoGebra y el estudiante o usuario utilizará sus herramientas para resolver la tarea, esto implica que generará esquemas de utilización, los cuales serán evidentes en sus acciones.

Figura 3 - El instrumento como parte artefacto y esquemas de utilización para una tarea



Fuente: Adaptado de Drijvers y Gravemeijer (2005, p. 166).

En cuanto a la Génesis Instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

> Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades,

> transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. […] los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (RABARDEL, 1995, p. 215).

Por lo anterior, las dos dimensiones de la Génesis Instrumental dependen de su orientación:

La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto. Este proceso se basa en las características y propiedades intrínsecas del artefacto. Dichas propiedades constituyen para el sujeto una propiedad permanente del artefacto. Mientras que la función adquirida es una propiedad extrínseca, la cual es atribuida por el sujeto para que el artefacto pueda ser constitutivo de un instrumento. El autor distingue dos niveles de instrumentalización por atribución de función a un artefacto.

> En un primer nivel, la instrumentalización es local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto es instrumentalizado momentáneamente […] en un segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad y de situaciones. La instrumentalización es durable o permanente (RABARDEL, 1995, p. 217).

La instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas, y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

En las dos fases de la Génesis Instrumental que se muestran en la figura 4, la instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento y la instrumentación, hacia la parte de formación de esquemas por parte del sujeto en una clase determinada de tareas dadas.

Figura 4 - Génesis Instrumental

Fuente: Adaptado de Trouche (2004).

En ese sentido, Bellemain y Trouche (2016) sostienen que estas dos fases no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlas en el análisis de una tarea, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?) y, por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

Otra perspectiva la brindan Drijvers *et al.* (2013) cuando presentan a la Aproximación Instrumental en términos de tres dialécticas: La *dialéctica artefacto-instrumento,* que describe el proceso de un artefacto que se convierte en un instrumento en manos de un usuario, lo que se conoce como génesis instrumental.

La *dialéctica instrumentación-instrumentalización,* que se refiere a la relación entre el artefacto y el usuario, se puede aplicar para mostrar cómo el conocimiento de un estudiante dirige el uso de un artefacto (instrumentalización), y cómo una herramienta puede moldear y afectar el pensamiento y las acciones de un estudiante (instrumentación). Finalmente, *la dialéctica esquema-técnica* se refiere a "las relaciones entre pensamiento y gesto (acciones)" (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 26). Desde una perspectiva práctica, las técnicas pueden verse como "la parte observable del trabajo de los estudiantes para resolver un tipo de tareas dadas (es decir, un conjunto de gestos organizados) y esquemas como los fundamentos cognitivos de estas técnicas que no son directamente observables" (DRIJVERS *et al.,* 2013, p. 27).

NOCIÓN DE ESQUEMA EN LA APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL

Rabardel (2011), a partir de esta noción de esquema de Vergnaud[31] (1996), define los *esquemas de utilización - EU* como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetirla o aplicarla en nuevos contextos. Estos esquemas, a su vez, pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias); *esquemas de acción instrumentada - EAI* (dirigidas a la tarea principal o primaria); y *esquemas de acción colectiva instrumentada - EAIC* (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común).

31 Para Vergnaud (1996), un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada. Está formado necesariamente por cuatro componentes: *Un objetivo*, sub-objetivo y anticipaciones; *Reglas de acción,* formada de informaciones y control; *Invariantes operatorias* (conceptos en acción y teoremas en acción); *Posibilidades de inferencias* en una situación.

En cuanto a los esquemas de uso y de acción instrumentada, Rabardel (2011) considera que un mismo esquema puede tener diferente estatus, es decir, puede ser esquema de uso o de acción instrumentada. Esto no se refiere a una propiedad del esquema en sí mismo, sino a su estatus dentro de la tarea realizada por el sujeto (su relación con una tarea principal o secundaria). Por lo tanto, según el objetivo de la tarea, se puede reconocer el estatus del esquema, como de uso o de acción instrumentada.

Con relación a las técnicas instrumentadas, Trouche (2005) y Andersen (2006) explican que éstas son la parte observable de un esquema de acción instrumentada. Es decir, que un esquema de utilización incluye técnicas y conceptos para usar un artefacto en una clase específica de tareas. Por lo que una técnica instrumentada, al incluir elementos conceptuales, permitiría reflejar el esquema acción instrumentada.

APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL: UN EJEMPLO

El ejemplo que se presenta es una experiencia se realizó con estudiantes de primer grado de Educación secundaria (12 o 13 años de edad), en una sala de informática en una escuela particular de Lima - Perú. La secuencia de tareas se realizó en dos encuentros donde se aplicaron tres tipos: la tarea N° 0, que tuvo la finalidad de familiarizar a los estudiantes con algunas herramientas del GeoGebra que permitieran el desarrollo de las tareas N°1 y N°2; la tarea N° 1, donde se centró en el desarrollo de esquemas de utilización de la simetría axial; y finalmente proponemos la tarea N° 2, donde se buscó que los estudiantes pongan en acción sus esquemas de utilización sobre el artefacto simbólico de simetría axial. Esta organización se puede observar en la tabla 2.

Tabla 2 - Descripción de los encuentros de aplicación de las tareas

Tareas	*Encuentro*	*Contenido*
Tareas N° 0	*I*	*Introducción al GeoGebra*
Tareas N° 1 (A, B, C, D y E)	*I y II*	*Simetría Axial*
Tareas N° 2 (A, B y C)	*II*	*Aplicaciones*

Fuente: García-Cuéllar (2014).

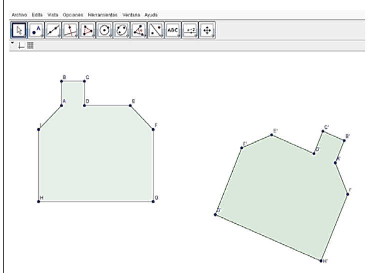
A continuación, se presenta el análisis *a priori* y *a posteriori* de la tarea 1C, que se elaboró y se planteó en la investigación de García-Cuéllar (2014). En el análisis *a posteriori* de la tarea 1C, mostramos las acciones y procesos realizados por una estudiante que denominamos Marcia.

Cabe señalar que las tareas 1A y 1B fueron tratadas y discutidas en el artículo de García-Cuéllar y Salazar (2017), y las tareas 1C, 1D, 2A y 2C, en el artículo de García-Cuéllar y Salazar (2019).

TAREA 1 C

En la figura 5, se presenta el enunciado de la tarea 1C de la secuencia realizada en la experiencia.

Figura 5 - Enunciado de la Tarea 1C

Abre el archivo tarea1_C.ggb. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA’, BB’, CC’, DD’, EE’, FF’, GG’, HH’ e II’. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones. *Traza el segmento AA’ y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo?* *Traza BB’ y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? ¿Qué puedes concluir con respectos a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? Justifica.*	

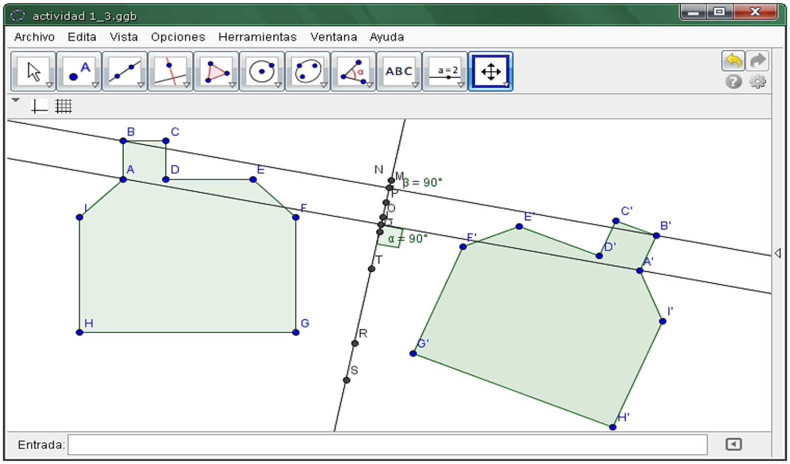
Fuente: García-Cuéllar (2014).

La tarea tiene como finalidad trazar el eje de simetría no vertical, es decir, con inclinación y sin cuadrículas, dado que en la tarea 1A y 1B se trabajó con el eje de simetría vertical. *A priori*, se esperaba que los estudiantes eligiesen la herramienta punto medio y trazasen los puntos medios de los segmentos AA’, BB’, CC’, DD’, EE’, FF’, GG’, HH’ e II’. Luego, trazasen la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Finalmente, que midiesen los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados y reconociesen que son ángulos rectos.

Para dar solución a la tarea, los posibles esquemas de uso que los estudiantes movilizarían son: recta, segmentos, punto medio, ángulos, perpendicularidad. Y el posible esquema de acción instrumentada sería la noción de eje de simetría como mediatriz de los segmentos AA’, BB’, CC’, DD’, EE’, FF’, GG’, HH’ e II’.

A posteriori, la estudiante Marcia usó la herramienta punto medio del GeoGebra y trazó los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II', y luego utilizando la herramienta recta que pasa por dos puntos, trazó la recta que contiene a todos los puntos medios. Además, haciendo uso de la herramienta recta que pasa por dos puntos, trazó las rectas que pasan por los puntos A y A', como también la recta que pasa por B y B'. Posteriormente, usó la herramienta ángulo para medir los ángulos formados en la intersección de las rectas que contienen a los segmentos AA' y BB' con la recta que contiene los puntos medios, tal como se muestra en la figura 6.

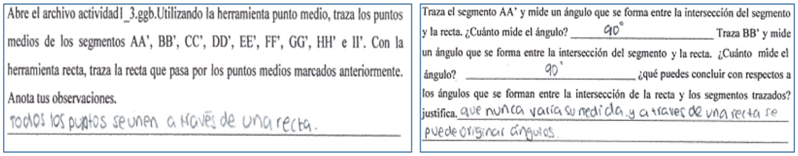
Figura 6 - Solución de Marcia en la Tarea 1C



Fuente: García-Cuéllar (2014).

La figura 7 (a) muestra que Marcia logró identificar que la recta que trazó contiene a todos los puntos medios de ambos polígonos (ver figura 7 a). Asimismo, logró darse cuenta de que en la intersección de los segmentos con la recta se forman ángulos rectos, tal como lo menciona en la figura 7 (b), que se muestra un recorte de su ficha de trabajo.

Figura 7 - Respuesta de Marcia en la Tarea 1C



Abre el archivo actividad1_3.ggb.Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones. todos los puntos se unen a través de una recta.

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° ¿qué puedes concluir con respectos a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. que nunca varía su medida. y a traves de una recta se puede originar ángulos.

(a) (b)

Fuente: García-Cuéllar (2014).

Con relación al análisis *a priori,* Marcia logró lo previsto para esta tarea. Es decir que las acciones de Marcia dan indicios de sus posibles esquemas de uso, como ángulo, recta, punto medio y mediatriz. Por lo anterior, podríamos indicar que generó el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz*.

En este breve ejemplo, en el que Marcia desarrolló una técnica instrumentada al dar solución a la Tarea en un ambiente tecnológico como el GeoGebra, nos permite identificar los valores pragmático y epistémico de esta técnica[32]. En cuanto al valor pragmático, se reconoce cuando se traza rectas y puntos medios con las herramientas propias del GeoGebra, sin necesidad de usar una regla, y por ende sin hacer mediciones que podrían no ser exactas con el uso de la regla, es el potencial que tiene la tecnología para hacer lo mismo que haríamos sin ella, de forma más eficaz o eficiente. Con respecto al valor epistémico, podemos decir que al generar el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz* se concibió este nuevo conocimiento a partir de comprender objetos involucrados, como punto medio, recta, ángulo recto, equidistancia, entre otros. En otras palabras, el valor epistémico de la técnica instrumentada está relacionado con el potencial que tiene ésta para ayudar a comprender objetos envueltos.

32 Para Chevallard (1992), una técnica es una forma de hacer o de dar solución a una tarea. Para Drijvers y Gravemeijer (2005), una técnica que se realiza en un ambiente tecnológico es llamada *técnica instrumentada*.

Por otro lado, Balacheff (2000) indica que los valores pragmático y epistémico de las técnicas muchas veces están entrelazados y no es posible separarlos, esto está restringido y condicionado por las limitaciones que tenga la tecnología, las que pueden afectar el dominio de validez epistémico al hacer la transposición informática de los objetos matemáticos involucrados. En relación con lo señalado, podemos percibir que el GeoGebra es una tecnología que tiene gran potencial en la enseñanza, porque favorece a la identificación de los valores epistémico y pragmático de la técnica.

El ejemplo de la tarea 1C permite identificar que la estudiante Marcia desarrolló las fases de Instrumentalización e Instrumentación de la Génesis Instrumental. Esto porque en un primer momento desarrolló esquemas de uso de las herramientas del GeoGebra para poder dar solución a la tarea planteada, porque movilizó sus esquemas de uso, como las nociones de punto medio, recta, ángulo recto, segmento, entre otros; que permitieron generar el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz,* es decir, la Génesis instrumental relacionada con la tarea propuesta se dio en Marcia.

INVESTIGACIONES EN PERÚ CON AI

A partir del estudio realizado por García-Cuéllar, Almouloud y Salazar (2019), se identificaron investigaciones en el periodo del 2013 al 2017 en los países de Brasil y Perú, que usaron como referencial teórico la Aproximación Instrumental - AI. Nos centramos en las realizadas en Perú, en el periodo del 2013 al 2019, específicamente por el Grupo de Investigación de Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) y por estudiantes de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. A continuación, la tabla 3, se esquematiza las investigaciones anteriormente mencionadas.

Tabla 3 - Investigaciones de grupo TecVEM con AI

Autor	*Año*	*Asesor(a)*
Chumpitaz, L.	*2013*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
García-Cuéllar, D.	*2014*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
León, J.	*2014*	*Mg. Miguel Gonzaga*
Silva, M.	*2017*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
Batallanos, J.	*2018*	*Dra. Jesús Flores Salazar*
López, P.	*2019*	*Mg. Mihály Martínez-Miraval*

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 4 se presentan los artefactos de estudio en cada una de las investigaciones, así como las fases de la Génesis Instrumental en las cuales se enfatizó.

Tabla 4 - Artefactos y fases de la Génesis Instrumental en las investigaciones

Autor	*Artefactos*	*Fases de la Génesis Instrumental*
Chumpitaz, L. (2013)	*Función por tramos*	*Instrumentalización*
García-Cuéllar, D. (2014)	*Simetría axial*	*Instrumentación*
León, J. (2014)	*Elipse*	*Instrumentalización*
Silva, M. (2017)	*Circuncentro*	*Instrumentalización e instrumentación*
Batallanos, J. (2018)	*Volumen del octaedro regular*	*Instrumentalización e instrumentación*
López, P. (2019)	*Hiperboloide*	*Instrumentalización e instrumentación*

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede inferir, en las investigaciones mostradas en la tabla 4 se han enfatizado en los artefactos simbólicos. Es decir, los objetos matemáticos fueron los artefactos y luego de pasar por el proceso de la Génesis Instrumental se convirtieron en instrumentos para los estudiantes de las distintas experiencias de estudio. Es importante mencionar que las investigaciones de Chumpitaz (2013), García-Cuéllar (2014) y León (2014) solo se enfocaron en una de las fases de la Génesis Instrumental (Instrumentalización o Instrumentación), y como lo indicaron Bellemain y Trouche (2016), estas fases de la Génesis Instrumental pueden ser focalizadas para el análisis de la investigación.

CONCLUSIONES

El desarrollo de la Aproximación Instrumental, en términos de Artigue (2002), logró un avance en las investigaciones en Educación Matemática en cuanto al uso de tecnologías digitales (calculadoras CAS, hojas de cálculo, Software como el GeoGebra, entre otros), dado que permitió reconocer los valores pragmáticos y epistémicos de las técnicas instrumentadas. Sin embargo, podemos afirmar que las tareas también juegan un rol importante, pues depende de ellas la activación de ciertas técnicas y conocimiento, es por ello por lo que no deben ser simples adaptaciones de lo que se realiza con lápiz y papel. Las tareas que envuelven tecnologías deben permitir un equilibrio entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas instrumentadas desarrolladas por los estudiantes.

A diferencia de otras realidades, específicamente de Europa, donde surgió la Aproximación Instrumental, en países de América Latina como Brasil y Perú, las investigaciones se han centrado en artefactos simbólicos. Es decir, se utilizó al mismo objeto matemático como artefacto, que mediante el proceso de Génesis Instrumental se transforma en Instrumento para el sujeto.

Los avances actuales de la aproximación instrumental se manifiestan en las investigaciones sobre la Orquestación Instrumental

(Trouche, 2004), que pone énfasis en el actuar del docente para generar la Génesis Instrumental de sus estudiantes. Trouche (2018) nos da un panorama de trabajo investigativo con los materiales y recursos de los docentes llamado Génesis Documental o Aproximación documental. En el caso de América Latina, específicamente en Perú, se están realizando investigaciones que abarcan aspectos de Orquestación Instrumental y se espera realizar estudios sobre la Aproximación documental.

REFERENCIAS

ANDERSEN, M. Instrumented in tool-and object perspectives. In: C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son, &N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference* "Technology Revisited", University of Hanoi, 2006, 19-26. Recuperado de: http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c63.pdf.

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 7, 245-274. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080#citeas

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2011, 6(8), 13-33. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948.

BALACHEFF, N. Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En GORGORIÓ, M.; DEULOFEU, J. (Eds.). *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* 70–88. 2000. Barcelona: Editorial Grao.

BATALLANOS, J. *Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2018. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/12143

BELLEMAIN, F. B.; Trouche, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática,* Nov. 2016. Bonito, Brasil. Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233

CHEVALLARD, Y. A Theoretical Approach to Curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 1992, 13, 2/3, pp. 215-230.

CHUMPITAZ, L. *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2013. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/4514

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument: Examples of Algebraic Schemes. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library,* vol 36. Springer, Boston, MA, 2005.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics,* 2013, 82(1), 23–49.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. Simetría axial mediada por el GeoGebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2014. doi: 10.13140/RG.2.2.13450.47048

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo,* 2017, v.6, 68-82. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/28906

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Estudio de la génesis instrumental del artefacto simbólico simetría axial. Tangram: Revista em educação matemática, 2019, 2(3), 28-48. Doi: 10.30612/tangram.v2i3.9068

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; ALMOULOUD, S.A.; SALAZAR, J.V.F. Abordagem instrumental: uma revisão da literatura no Peru e no Brasil dos anos 2013 a 2017. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 2019, 32(2), 742-752. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/334046152_

LEÓN, J. *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2014. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652

LÓPEZ, P. *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2019. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/13406

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies: aproche cognitive des instrumentns contemporains.* Paris: Armand colin, 1995.

RABARDEL, P. *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

SILVA, M. *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2017. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/8727

TROUCHE, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2004, 9: 281–307.

TROUCHE, L. An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* Guin, Dominique, Ruthven, Kenneth, Trouche, Luc (Eds.), 2005, 83-112.

TROUCHE, L. *Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza – una historia de trayectorias*. Revista Educación Matemática, 2018, 30(3), 9-40. doi: 10.24844/EM3003

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas,* pp. 155-189. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.

3

Maria Ivete Basniak

Everton José Goldoni Estevam

LA GÉNESIS DOCUMENTAL COMO APORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO PARA INVESTIGACIONES SOBRE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE Y TECNOLOGÍA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.219-248

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en el campo del aprendizaje profesional de profesores que enseñan matemáticas han ampliado modelos sobre el conocimiento inherente a la profesión docente para problematizar y comprender las implicaciones que la tecnología[33], especialmente las tecnologías digitales, imponen a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Koehler y Mishra (2009), por ejemplo, basados en las ideas de Shulman con relación al Conocimiento Pedagógico de Contenido (PCK[34]), incluyen el conocimiento tecnológico en su constructo, con el fin de aclarar elementos para enfocar el Conocimiento Tecnológico y Pedagógico de Contenido (TPACK). Tal constructo es utilizado como herramienta teórico-metodológica para investigar los diferentes niveles de conocimiento tecnológico y pedagógico de profesores (MISHRA; KOEHLER, 2006), y más específicamente del Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido de Matemática – *Mathematics TPACK* (NIELS et al., 2009; PALIS, 2010).

Esas contribuciones teóricas fundamentan nuestras investigaciones anteriores (BASNIAK; ESTEVAM, 2018a), relacionadas con investigaciones sobre conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido por parte de profesores de Matemática, cuando reportan sus prácticas en un contexto de grupo de estudios. Los resultados hicieron evidente cierta confusión acerca del concepto de tecnología por parte de los profesores, un infundado encantamiento por la incomprensión de los aspectos didácticos y pedagógicos inherentes a su integración en la enseñanza de las matemáticas (BASNIAK; ESTEVAM, 2018a). De manera idéntica, los resultados indicaron la necesidad de ampliación y profundización de lentes teóricos para hacer posible discusiones y aclaraciones complementares.

33 Utilizamos el término tecnología en singular porque nos referimos a la tecnología como proceso y producción humana.

34 Los acrónimos utilizados se refieren a los términos ampliamente difundidos en inglés.

En ese sentido, inicialmente nos encontramos con los aspectos fundamentales de la Génesis Instrumental (RABARDEL, 1995; 2011) como referente potencial para presentar contribuciones sobre el análisis del aprendizaje de los alumnos, impregnada por recursos digitales y asociada con prácticas guiadas por la Enseñanza Exploratoria de Matemática (BASNIAK; ESTEVAM, 2018b; BASNIAK; ESTEVAM, 2019).

Sin embargo, cuando reflexionamos sobre la gama de factores que influyen en la práctica pedagógica del profesor, ampliamos nuestra comprensión sobre su complejidad. Esto porque ellos no solamente utilizan los recursos que disponen, sino también documentos de orientación, condiciones físicas y estructurales, sueldos, tiempo de preparación de clases, posibilidad de formación y de cambio de experiencias e ideas con los compañeros, las condiciones de los alumnos con quienes trabajan, entre otros. De esta manera, corroboramos las demandas de aporte teórico que favorecen el desarrollo de investigaciones consistentes en este campo, las cuales en cierta medida puedan considerar esa multiplicidad de influencias.

Después de dos décadas estudiando la apropiación de herramientas digitales en clase por los profesores de Matemática, Monaghan y Trouche (2016) llaman la atención sobre el hecho de que ésta es aún una cuestión compleja, que necesita ser problematizada, desde las razones que conducen al uso o no de determinados artefactos por parte de los professores en su práctica pedagógica. Ello porque, de acuerdo con los autores, investigar como debe ser utilizado determinado artefacto digital en la enseñanza de la Matemática es diferente de investigar las razones por cuales los profesores integran ese artefacto en su práctica profesional. En ese contexto, es necesario considerar los artefactos digitales dentro de la gama de recursos utilizados en el planeamiento y realización de sus clases. Además, como señala la Teoría Antropológica del Didáctico de Chevallard (1992), las matemáticas enseñadas consisten en una consiste en una transposición de la matemática, adaptada para el estudio en una determinada institución. Monaghan y Trouche (2016) señalan que, especialmente en lo que se refiere al uso de artefactos digitales en clase por profesores de Matemática, lo que ocurre normalmente es que, cuando encuentran determinado problema (ejemplo: el uso de calculadoras en la enseñanza), el profesor no busca soluciones entre los compañeros o institucionalmente. En vez de eso, él intenta solo y de forma individual encontrar la solución al problema, sugiriendo que "enseñar es más un oficio que una profesión" (MONAGHAN; TROUCHE, 2016, p. 358, nuestra traducción).

Reconociendo que las tecnologías digitales, aún que presentes en el ambiente escolar, no están integradas con la práctica del profesor, y de este modo, no traen cambios para el proceso de enseñanza de la Matemática, así como también la necesidad de considerar en investigaciones en este campo los aspectos multifacéticos que afectan esa práctica, discutimos en ese texto cómo la Génesis Documental (GUEUDET; TROUCHE, 2009) puede constituir un aporte teórico-metodológico para investigaciones sobre desarrollo profesional del docente de matemáticas. Para esos fines, son presentadas las bases teóricas de ese abordaje, los cuales son complementadas con extractos de experiencias y discusiones realizadas en un contexto de un grupo de estudios de profesores, realizado desde 2013 hasta la actualidad por la perspectiva de Comunidades de Práctica de profesores que enseñan Matemática como contexto de formación profesional (WENGER, 1998; ESTEVAM; CYRINO, 2019; ESTEVAM, en prensa).

ASPECTOS FUNDANTES DE LA GÉNESIS DOCUMENTAL

La *Génesis Documental* (GUEUDET; TROUCHE, 2009) tiene sus fundamentos en la *Génesis Instrumental* (RABARDEL, 1995; 2011), por cual estudia la relación entre tres elementos principales: artefacto, esquema e instrumento.

Para Rabardel (1995; 2011), un *artefacto* es algo susceptible de uso, elaborado para ser utilizado en actividades intencionadas, habiendo sufrido una transformación de origen humano. Así, un bolígrafo, un teléfono celular, un idioma son ejemplos de artefactos.

Por otra parte, un *instrumento* está relacionado con el proceso de acción de un sujeto que utiliza un artefacto para una determinada acción. De tal suerte, el instrumento designa el artefacto en una situación en la que está siendo utilizado, "en una relación instrumental con la acción del sujeto, como medio de esta acción" (RABARDEL, 2011, p. 92, nuestra traducción).

De esta manera, "un *instrumento* resulta de un *proceso*, llamado *génesis instrumental,* por medio del cual el sujeto construye un *esquema* de utilización del *artefacto* para una determinada clase de situaciones" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 204, nuestra traducción). En este contexto, un *esquema* es determinado por los autores desde la perspectiva de Vergnaud, quien lo define con base en Piaget, como "una *organización invariable de actividad* para una dada clase de situaciones" (GUEUDET, TROUCHE, 2009, p. 204, nuestra traducción, énfasis original). Así:

Instrumento = Artefacto + Esquema de Utilización

Desde la distinción entre *artefacto* e *instrumento* introducida por Rabardel (1995, 2011), Gueudet y Trouche (2009) establecen una distinción entre *recursos* y *documentos.* Los autores utilizan el término *recursos* para enfatizar la variedad de artefactos que pueden ser utilizados por un profesor, y entonces recurso puede ser “un libro, un software, una hoja de resolución de un alumno, una discusión con un compañero, etc.” (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, nuestra traducción).

Para los autores, un recurso nunca está aislado, porque un profesor utiliza un conjunto de recursos en la documentación de su trabajo, y ocurre un proceso de génesis, produciendo lo que llaman *documento*, que puede ser resumido por la fórmula:

Documento = Recursos + Esquema de Utilización

Un documento se constituye, por lo tanto, desde los recursos que son utilizados en asociación con los esquemas de utilización, los cuales adquieren estatus de documento por medio de un proceso de génesis basado en la incorporación y revisión de los recursos al trabajo del profesor.

Cuando se trata de un conjunto de recursos o un documento, es necesario considerar tres componentes entrelazados: i) componente material: papel, ordenador; ii) componente de contenido matemático: nociones involucradas, tareas matemáticas y técnicas; iii) componente didáctico: elementos organizacionales (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Esto porque, en ese proceso, el profesor crea *esquemas* de utilización de ese conjunto de recursos para la misma clase de situaciones, en diferentes contextos.

Más allá de eso, un *esquema* de utilización de un conjunto de recursos involucra una parte que se puede observar y otra invisible. Los primeros son llamados de *usos* por los autores, y corresponden a las regularidades en la acción del profesor para la misma clase de situaciones en diferentes contextos. Con respeto a los aspectos invisibles, ellos constituyen los *invariantes operacionales*, que comprenden la estructura cognitiva que orienta la acción (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Así, el proceso de génesis es continuado y nunca está aislado. Pertenece al sistema de documentación del profesor, evoluciona por medio de génesis documentales, y Gueudet y Trouche (2009) lo representan por medio de una nueva ecuación:

Documento = Recursos + Usos + Invariantes Operacionales

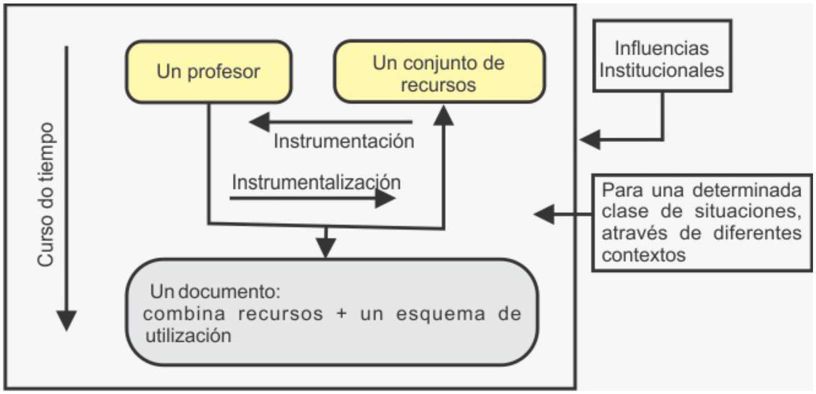
Gueudet y Trouche (2009) señalan que la actividad profesional posee una dimensión productiva, que comprende el resultado del trabajo realizado, pero la actividad también implica un cambio de la práctica y de las creencias profesionales del sujeto, en una dimensión constructiva. Ese cambio tiene influencia en otros procesos de producción, de manera que esa relación *productiva/constructiva* presenta naturaleza dialéctica. Por ejemplo, los autores mencionan investigaciones anteriores en las que el diseño y la ejecución de una tarea han sido asociados con la evolución de la práctica, no limitándose a la integración de un nuevo recurso.

Es evidente que los estudios no deben atenerse al aspecto material de los documentos, sino también investigar la evolución de los usos e invariantes operacionales. La integración de un recurso nuevo corresponde a un proceso de génesis y desarrolla un documento desde él y otros recursos, y ese documento debe tener su lugar en el sistema de documentación. Los autores señalan tres cuestiones principales en sus investigaciones: i) los procesos de génesis son aplicados a un conjunto complejo de recursos; ii) ellos involucran aspectos productivos y constructivos; iii) las razones de involucramiento de un recurso nuevo en el desarrollo de un documento (llamado por los autores de *integración de un recurso a un documento*) son intrincadas, pero el estudio del sistema de documentación permite aclarar algunas de esas razones.

Gueudet y Trouche (2009) señalan que esos procesos son centrales, de manera que el trabajo de documentación del profesor es fuertemente ligado con su desarrollo profesional. Eso porque ellos hacen evidentes diversos dominios involucrados en su práctica académica, así como en otras funciones que desempeñan, intrínsecamente asociadas con su autoconocimiento y sus capacidades propias (PONTE, 1994). Entonces, tiene sentido estudiar la Génesis Documental articulada con el desarrollo profesional de profesores que enseñan Matemática.

La Génesis Instrumental tiene una naturaleza dual, de manera que, por una parte, la actividad del sujeto guía la forma como el artefacto es usado, y de cierta manera, moldealo (*instrumentalización*); por otra parte, las posibilidades y restricciones del artefacto influencian la actividad del sujeto (*instrumentación*). Similarmente, Gueudet y Trouche (2009) introducen esa doble naturaleza en la Génesis Documental (Figura 1), porque, por una parte, la actividad del profesor interfiere en la apropiación de los recursos (*instrumentalización*) y, por otra parte, los recursos influencian la actividad de los profesores (*instrumentación*).

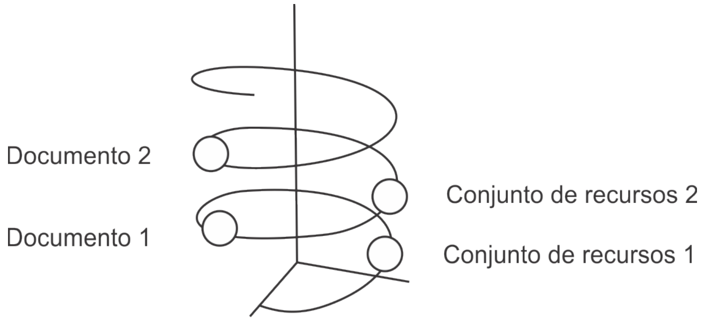
Figura 1 – Esquema de representación de la Génesis Documental



Fuente: Gueudet y Trouche (2009, p. 206).

La Figura 1 representa el proceso de *Génesis Documental*. Es posible observar que la dimensión de la *instrumentalización* representa los procesos de apropiación y reformulación de un (conjunto de) recurso(s) por el profesor, mientras la dimensión de la *instrumentación* se refiere a la influencia de los recursos que el profesor utiliza para su actividad. Así, una génesis documental no debe ser considerada una máquina de transformación de un conjunto de recursos como entrada y un documento como salida, porque es un proceso en continuación, en articulación con el proceso de desarrollo profesional docente. Por lo tanto, Gueudet y Trouche (2009) consideran que un documento desarrollado desde un conjunto de recursos proporciona nuevos recursos, que pueden estar involucrados en un nuevo conjunto de recursos, que va a llevar hasta un nuevo documento, en una relación dialéctica entre recursos y documentos, representada por los autores por una hélice, en una espiral alrededor de un eje que representa el tiempo (Figura 2).

Figura 2 - Representación esquemática de una génesis documental



Fuente: Gueudet y Trouche (2009, p. 206).

¿Rabardel y Bourmaud (2005) citados en Gueudet y Trouche (2009)?, que los instrumentos desarrollados por un sujeto en su actividad profesional constituyen un sistema cuya estructura corresponde a la estructura de la actividad profesional del sujeto. Los autores también consideran que, de esta misma manera, un profesor desarrolla un sistema estructurado de documentación que evoluciona en conjunto con su práctica profesional. En este sentido, los autores señalan que, desde el punto de vista de la investigación, la observación y el análisis del sistema de documentación permite comprender mejor el desarrollo profesional del profesor, y permite especialmente capturar la evolución introducida por recursos digitales.

En este trabajo no ponemos la atención en la estructura de un sistema de documentación que, de acuerdo con Gueudet y Trouchen (2009), necesita de estudio específico y levanta cuestiones metodológicas delicadas. Ello porque exige observación de largo plazo en lugares diferentes, tanto fuera de la clase como dentro del propio lugar de trabajo del profesor. Esos aspectos constituyen enfoques de investigaciones aún en desarrollo.

Sin embargo, presentamos algunos datos empíricos particularmente ubicados en dos encuentros realizados con la Comunidad de Práctica Reflejar, Discutir y Actuar sobre Matemática – CoP-ReDAMAt[35] porque creemos que pueden contribuir para aclarar aspectos clave de la teoría.

ARTICULACIÓN DE LOS ASPECTOS FUNDAMENTALES EN LA EXPERIENCIA QUE REALIZAMOS EN LA COP-REDAMAT

Los datos que problematizamos surgieron de dos encuentros con duración entre una hora y media y dos horas cada uno, que ocurrieron a finales del año de 2017. En ellos fueron realizadas la resolución y posterior discusión de una tarea titulada Taxi (Figura

35 Para comprender sobre el trayecto de ese grupo que ha dado origen al CoP-ReDAMat, así como sus características, recomendamos la lectura de Estevam y Cyrino (2019) y Estevam (en prensa).

3), que fue elaborada por alumnos de Facultad de Matemática en el ámbito del Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia (Pibid en su acrónimo en portugués), y propuesta por una de las investigadoras, debido a que esa tarea involucraba conceptos de álgebra (centro de las discusiones del grupo de profesores en aquel período) y el software GeoGebra.

Figura 3 – Tarea Introducción a las ecuaciones

TAREA 1 – INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES[36]

*El fichero puede ser accedido en el porta del PIBID Matemática Unespar Campus União da Vitória <**http://pibidmatfafiuv.webnode.com/tarefas-com-o-geogebra**/>. Es necesario descargar y descomprimir el fichero para que funcione correctamente (el fichero no funciona cuando es abierto directamente de la carpeta comprimida). Después de descomprimir el fichero, aceda la carpeta descomprimida que fue creada y abra el fichero tarefaequacoes.html. El fichero funciona correctamente en los navegadores Google Chrome y Mozilla Firefox.*

En el fichero ***tarefaequacoes.html***, observe la ruta que puede ser recurrida por un taxista saliendo de la Praça Coronel Amazonas y seleccione la opción ***Mostrar tudo***. En cada viaje de taxi es cobrado un valor inicial fijo de R$ 5,00 e un valor de R$ 2,50 por kilómetro recurrido (esos valores pueden ser cambiados en el fichero). Para moverse el taxi es necesario hacer click con el ratón sobre el punto verde en el taxi y usar las flechas del teclado. El fichero haceposible que el taxi se mueva en cualquier dirección en el camino definido, con el mismo mapa del fichero presentando flechas para indicar la dirección correcta en determinadas calles. Así es posible hablar sobre la importancia de respetar las leyes de tránsito.

1. Un pasajero desea ir del punto inicial para el destino 1. Mueva el taxi hasta el destino 1 y conteste las preguntas:

a) ¿Cuáles valores fueron cambiados?

b) ¿Cuál es el valor para pagar?

c) Escriba las operaciones utilizadas para calcular ese valor, y represente esas operaciones reemplazando los valores que son cambiados por letras.

2. Se el pasajero quiere ir del punto inicial para el destino 2 (para volver el taxi para el origen y limpiar los valores en el fichero, haz click en la llave ***Zerar***, y en seguida, ***Mostrar tudo***), Acuérdese que para mover el taxi es necesario hacer click en el punto verde sobre el taxi y utilizar las flechas del teclado.

a) ¿Cuáles valores fueron cambiados?

b) ¿Cuál es el valor para pagar?

c) Escriba las operaciones utilizadas para calcular ese valor. Represente esas operaciones reemplazando los valores que son cambiados por letras.

36 Observación de traducción: El fichero solamente está disponible en portugués.

3. Seleccione la opción ***Zerar***. Otro pasajero desea ir del punto inicial para el destino 3 (Acuérdese que para mover el taxi es necesario hacer click en el punto verde sobre el taxi y utilizar las flechas del teclado).
a) ¿Cuál es la distancia recorrida?
b) ¿Cuál es el valor para pagar por el viaje?
4. Un pasajero quiere salir del punto inicial, irse para el destino 3, y después volver para el destino 2. Observe que hay flechas en el mapa que indican la dirección en la calle que el coche puede ir.
a) ¿Cuál es distancia recurrida?
b) ¿El valor para pagar va a ser lo mismo en la cuestión 3 ítem b? ¿Por qué?
5. Observando las cuestiones anteriores, ¿cuál es la relación entre la distancia y el valor para pagar?
6. Escribe la expresión que representa la relación entre una distancia recurrida cualquier y el valor para pagar.
7. Seleccione la opción ***Zerar***, y después seleccione la opción ***Mostrar somente valor a ser pago***. Otro pasajero desea irse del punto inicial para el destino 4.
a) ¿Cuál es el valor para pagar por el viaje?
b) ¿Es posible calcular la distancia recorrida? ¿Cómo?
c) Escribe la expresión que representa la relación entre esa distancia y el valor para pagar.

Fuente: Lima *et al.* (2017, p. 28-29).

Los profesores participan voluntariamente de los encuentros de la CoP, en donde son estudiados y debatidos dilemas de su práctica profesional, tratados en el ámbito del grupo, partiendo de los propios intereses que vienen de sus experiencias (ESTEVAM; CYRINO, 2019). Los encuentros se dan regularmente en la Universidad (ubicación sugerida por los profesores participantes), generalmente a cada dos o tres semanas, coordinados por dos profesores investigadores (autores de ese trabajo).

En el encuentro del día 29/09/2017, participaron tres profesores de Matemática (José, Luis y Luciana[37]), que trabajan en escuelas de la red pública del estado de Paraná por lo menos durante 10 años (contabilizados en el año de 2017). En los primeros

37 Los profesores participantes de la CoP-ReDAMat son identificados por seudónimos, de acuerdo con el formulario de consentimiento asignado, y los formadores (autores del capítulo) por sus nombres verdaderos.

cuarenta minutos, los profesores resolvieron la tarea, y en un segundo momento, hicieron comentarios sobre su potencial y sus impresiones al resolverla. En ese segundo momento, se mostraron entusiasmados para proponer la tarea para sus alumnos, de acuerdo con el extracto siguiente, de las transcripciones de la grabación de audio, que es realizada en todos los encuentros.

José: *Podemos comprobar eso con nuestros grupos de alumnos …*
Luciana: *Yo tengo dos novenos años y un séptimo...*
Luis: *¡Yo tengo ganas de comprobarlo!*
Formador: *Pienso que es interesante plantear algunas conjeturas [...].*
Luciana: *¿vámonos a comprobarlo?*

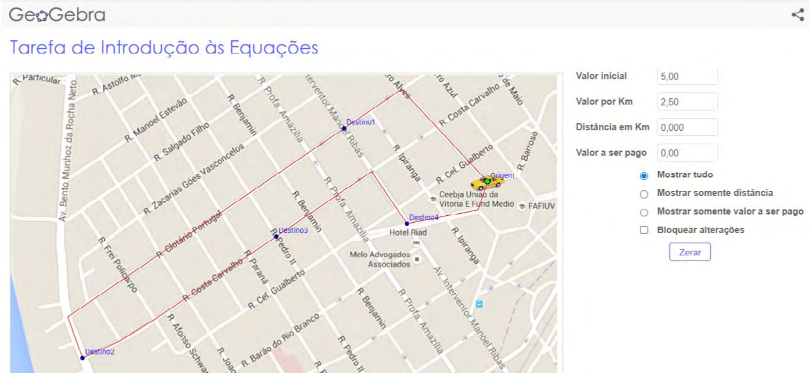
(Encuentro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Así, en el encuentro posterior, realizado excepcionalmente cerca de dos meses después, José, Luis y Luciana traen los resultados del desarrollo de la tarea por sus respectivos alumnos, y más un profesor (Paulo), que se perdió el encuentro anterior, integró las discusiones realizadas. Esas discusiones ofrecen indicios de los recursos y esquemas empleados por los profesores, también de las respectivas implicaciones para su práctica profesional.

La Figura 4 ilustra la representación estructurada en un *applet*[38] en GeoGebra, que consiste en un recorte de una región de la ciudad con (posibles) trayectos para un taxi, desde cuatro destinos previamente fijados, y considerando una cuota inicial de un viaje, la distancia y el costo por kilómetro recurrido (ver tarea en la Figura 3). De este modo, comprendemos que ese *applet* constituye un ejemplo de artefacto, que sirve de base para la resolución de la tarea Introducción a las Ecuaciones.

38 *Applets* son construcciones interactivas creadas usando el *software* GeoGebra, que permiten la manipulación y la animación de componentes, a veces de manera intuitiva, sin demandar conocimientos más profundos del *software*. Su principal función es ayudar el entendimiento de contenidos a partir de representaciones dinámicas de fenómenos, relaciones o procesos.

Figura 4 – *Applet* utilizado para la tarea Introducción a las Ecuaciones



Fuente: Elaboración propria.

Sin embargo, cuando es utilizado por los profesores para resolver la tarea, partiendo del movimiento del coche por la(s) ruta(s) deseado(s), el *applet* asume un estado de instrumento. Ello porque diferentes usos pueden ser empleados para él. Es posible cambiar las casillas señaladas: *mostrar todo, mostrar solo la distancia, mostrar solo la cantidad a pagar, bloquear cambios, restablecer*. También se pueden indicar diferentes valores para ellas: *valor inicial, valor por kilómetro, distancia en kilómetros.* Aún es posible mover el coche en diferentes direcciones, prohibida en la calle, como se expresa en el extracto siguiente: mientras un profesor utilizo la orientación de la calle, los otros movieron el coche libremente, y ello contribuyó para muchas discusiones en el grupo.

Luciana: *Ir para el 3 y volver para el 2 [refiriéndose a los destinos marcados en el mapa]. Es decir, entonces, que si vuelve para el 2, él debe haber pasado anteriormente. ¿Siempre hay que hacer el mismo trayecto?*

José: *En el sentido de la orden, ¿vale? [refiriéndose a la orientación de la calle].*

Luciana: *Uhum… ¡Él no puede salir del origen e irse directamente para el 3! Porque las flechitas siempre indican que hará eso, ¿vale?*

Formadora:	*¿La dirección [sentido de la calle]?*
Formador:	*Él siempre sigue la dirección. Y él debe hacer el trayecto, no se puede cortar por la mitad.*
Luciana:	*Pero en la 3 eso no está dicho. Dice simplemente pasar del punto de partida al 3, entonces yo he pensado que podría irse por aquí. Entonces después que he visto que las flechitas son así.*
Formador:	*Ah, la dirección contraria.*
Luciana:	*Porque entonces yo leí la pregunta siguiente y percibí que debería volver.*
Luis:	*¿Para atrás, él [el taxi] no vuelve?*
Formadora:	*Sí. El coche sigue para atrás.*
Formador:	*Pero si la calle es de sentido único, ¿él se va en el sentido contrario [refiriéndose al sentido prohibido]?*
Formadora:	*Sí.*
Luciana:	*Por ello que yo hice, de aquí, venir [del destino 1 irse para el destino 4 y para el 3] para aquí, y el 3…*
Luis:	*Pero, cuando usted vuelve, el precio continúa aumentando porque el kilometraje se va aumentando. Si usted se va en la dirección contraria, él va a cobrar. ¡Qué interesante! Me gusta.*

(Encuentro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Se percibe que algunos profesores vislumbran la posibilidad del applet de reproducir una situación real, incluso estando en contra de las normas de tránsito, posible viajar en la dirección contraria en una calle. Podemos considerar que hay usos diferentes del mismo artefacto, porque cuando comprueban las posibilidades para mover el coche, los profesores descubren nuevas maneras, incluso algunas cuya perspectiva no fue pensada inicialmente, cuando fueron construidos por los autores. Sin embargo, las discusiones colectivas entre los profesores y formadores condujeron la comprensión para una nueva posibilidad, con potencial para enriquecer las discusiones en clase. Por lo tanto, un nuevo recurso se ha configurado, y ha pasado a ser parte del conjunto de recursos que el profesor dispone para trabajar con el *applet*, que es formado por diferentes recursos, juntamente con la tarea (Figura 3). De acuerdo con los profesores, esa variedad de recursos puede ser interesante para el trabajo pedagógico, cuando es integrado con otros. También da muestra de que están alineados con la institución a la cual se está vinculado, y que demanda asociación de cuestiones prácticas, como se percibe por el extracto siguiente.

Luis:	*Me gustó mucho el "mapita" con "esa cosa" aquí [refiriéndose a la posibilidad de mover el coche].*
José:	*Muy bueno. Creo que ellos [los alumnos] pueden comprobar y, además, tener un poco más de conocimiento, ¿vale?*
Formador:	*¿Más conocimiento de qué, José?*
José:	*Que muestra un poco más lo concreto. Porque en el coche hay que viajar... Es algo que se encuentra más cercano de la práctica.*
Luciana:	*Es pertinente porque puede ser algo de la vida de él [del alumno], porque está allí, en la ciudad donde él vive.*
José:	*Sí, más cercano de su realidad. Salir de aquí [e] irse allí.*
Luciana:	*Contextualización, que ellos quieren mucho [refiriéndose a la Secretaria del Estado de Educación].*
Formador:	*Hay apelación para la realidad, es un contexto real para ellos.*
José:	*El mapa, hoy en día, es mucho importante, como el GPS.*
Luciana:	*De repente hasta para que puedan saber programar el GPS.*

(Encuentro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

En el extracto, más allá del *applet*, de la tarea, de las discusiones con los compañeros, son mencionadas las posibilidades de usar el GPS, así como el potencial de la situación para satisfacer demandas de los documentos que guían la enseñanza de Matemática que, entre otras cuestiones, sugieren que los contenidos sean trabajados de forma contextualizada (PARANÁ, 2008). Eso hace evidente que la dimensión colectiva, por medio de la problematización de percepciones, creencias y experiencias, permite ampliar conocimientos y el conjunto de recursos disponibles en una determinada situación utilizando tecnología. En este sentido, Gueudet, Pepin y Trouche (2013) señalan que las interacciones con compañeros, generalmente partiendo de recursos, son cruciales para el desarrollo profesional de los profesores.

Discusiones como las mencionadas aquí ofrecen oportunidades para que el profesor reflexione sobre lo que está trabajando y como la integración de una situación como la problematizada tiene impacto en su práctica profesional. Las dificultades que los alumnos podrían tener, por ejemplo, constituyen aspectos presentes en las discusiones, provocados por las (diferentes) formas como los propios profesores resolvieron la tarea, los usos que hicieron del *applet*, estrategias y procedimientos que podrían ser empleados, como también sus implicaciones para los objetivos de aprendizaje establecidos. Traemos un extracto en que la profesora Luciana confronta la forma como el profesor Luis resolvió el ítem 7 de la tarea, por considerarla más compleja que la utilizada por ella.

Luis:	*Yo pienso que lo más complicado es la última [refiriéndose al ítem 7], la 7. Es posible utilizar la proporción. Pero, para el 8º año, no sé si ellos se pueden "ahogar" en esa última, quizás por no tener experiencia con las proporciones, ¿vale?*
Formador:	*Pero ellos estudian proporciones, ¿cierto?*
Luciana:	*Es contenido para el 7º año.*
Formador:	*Pero ¿ustedes creen que esa 7 es la cuestión más compleja de todos los ítems?*
Luis:	*¿Por qué allí es posible calcular la distancia que fue recorrida? ¿Cómo?*
Formador:	*Es que contrarresta la expresión ¿cierto? Contrarresta la ecuación.*
Luis:	*Entonces el resultado es 320 metros, e eso equivale a 80 centavos.*
José:	*¿Lo hiciste al revés?*
Luciana:	*¡Dios, Luis! ¡No compliques!*
Formador:	*Pero lo interesante es que ello es algo que los alumnos pueden hacer.*
Formadora:	*¿Como ustedes lo pensarían?*
Luciana:	*Yo haría las operaciones al revés.*

(Encuentro CoP-ReDAMat 29/09/2017).

Luis y Luciana son profesores en escuelas diferentes, con otras realidades y clases de 7º y 8º años. El uso de diferentes recursos es impregnado por las condiciones de trabajo que el profesor posee, es decir, por las condiciones físicas y materiales (componente material) que cada profesor encuentra en su ambiente de trabajo, así como las influencias que vienen de sus experiencias y conocimientos anteriores (componente didáctica), que se relacionan con la componente de contenido matemático. En este sentido, las diferentes estrategias usadas hacen explicitas posibilidades de resolución que pueden ampliar percepciones, especialmente las expectativas de los profesores con relación a los alumnos. Eso permite que ellos lidien de manera más amplia con las cuestiones, estrategias y representaciones que los alumnos utilizan para la resolución de la tarea.

Para ello, la interacción del *applet* parece jugar un rol fundamental en ese proceso de elaboración y depuración de estrategias, lo que da señales de procesos de instrumentalización en la Génesis Documental.

Para aclarar esa cuestión, utilizamos un episodio en el que el profesor José se refiere a la realización de la tarea de dos maneras diferentes. En la primera de ellas, sin el uso del ordenador, él hace un dibujo en la pizarra y pide que los alumnos *imaginen* como mover el coche; y en la segunda él utiliza el *applet* en el ordenador.

José: *Yo intenté usar los laboratorios y no fue posible porque todos son de Paraná Digital [refiriéndose a los ordenadores], y entonces solo cinco o seis ordenadores estaban funcionando, más mi notebook. Entonces yo hice con algunos que ya habían hecho [en clase sin usar el ordenador], yo pedí para algunos que podían venir hacer y dos que no tenían conocimiento de la tarea, que la hicieron por primera vez. Son esos de aquí [muestra las resoluciones de los alumnos que no habían hecho la tarea anteriormente], y esos de aquí la hicieron de nuevo. Ellos ya habían tenido contacto [refiriéndose a la tarea].*

[...]

[los formadores cuestionan cuáles diferencias José encontró entre la tarea realizada con y sin el uso del ordenador].

José: *Yo pedí a algunos de ellos a pusieren aquí [en las hojas de respuesta], pero [el applet] llama más atención. Especialmente allá [en la realidad de la escuela], en que la mayoría no tiene contacto con las tecnologías. Ver el coche e interactuar con la cuestión es más atractivo, llama más la atención.*

Formadora: *Pero ¿y en términos de comprensión del contenido?*

Formador: *[observando hojas de registro de los alumnos] Ese aquí escribe: "Las tareas son una buena manera de atraer los alumnos y para que los alumnos perciban diversas formas de llegar al resultado [...]. Sin embargo, esa tarea podría ser adaptada para todos los tipos de aparatos electrónicos". Creo que es porque no ha funcionado. [...] Ese aquí, también: "En mi opinión es una manera para que los alumnos comprendan mejor las técnicas de resolución".*

[...]

(Encuentro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

La componente material, a saber, la falta de ordenadores y materiales para realizar tareas como la propuesta, que favorezca enfocar el contenido de manera conceptual y no solamente la técnica de resolución de ejercicios es referenciada por los profesores como algo que hace más difícil la realización de prácticas de clase que transciendes clases expositivas. El profesor José, por ejemplo, menciona que, para conseguir desarrollar la tarea en clase, porque no había los ordenadores necesarios para trabajar con todos los alumnos (cerca de 40), desarrolló una adaptación *dibujando* en la pizarra el mapa del *applet* y solicitando que los alumnos *imaginasen* como realizar las acciones propuestas de manera dinámica. En la secuencia, usó su propio aparato electrónico para que pudiese realizar la tarea con un grupo más pequeño de alumnos, con el *applet* en el ordenador. No tuvimos acceso al que los alumnos respondieron en la tarea realizada en clase porque el profesor trajo para el encuentro solamente las tareas que los alumnos contestaron usando el ordenador. Todavía, ello puede tener relación con el desempeño de los alumnos (que no tuvieron acceso con *applet*) más acá de lo esperado, y que hizo que José fuese a buscar medios para realizar la tarea con otro grupo de alumnos con el uso del ordenador.

Al final de la discusión, los formadores provocaron reflexiones específicas sobre el contenido matemático involucrado, que refirió a la introducción al Álgebra y, más especialmente a las Ecuaciones. En ese momento, se muestran frustraciones ancladas en incoherencias entre las expectativas de los profesores y aquello que emergió de las actividades de los alumnos. Cuando fueron cuestionados sobre aspectos pedagógicos de la experiencia, se revelaron los extractos siguientes.

José: *Yo les pregunté a ellos la cuestión de la expresión, incógnita y variable... Los alumnos del primero [año de la Enseñanza Secundaria] tuvieran muchas dudas... en como diferenciar ecuación, expresión, lo que es variable. Y los del tercero [año de la Enseñanza Secundaria] fueron un poco mejor, ya tenían alguna idea.*

Formador: *Porque ellos ya habían estudiado bastante la función también ¿vale?*

José: *Tenían una mejor idea acerca de eso que los del primero año, cuando yo preguntaba si hay expresión aquí o si es ecuación, tenían dudas... entonces pregunté si ellos sabían el concepto y dijeron que no... y yo empecé a mostrar para ellos... Hasta comentar que algo en Matemática no es sólo aquello, sino que depende del contexto que usted analiza. Puede ser una expresión o puede ser una ecuación... Puede ser una variable o incógnita, asumir solamente un valor… Fue posible explorar esa cuestión que aparece.*

Formador: *Entonces hubo la posibilidad de discutir esas ideas diferentes.*

Luciana: *Con el séptimo [año de la Enseñanza Básica] también, porque era el comienzo que nosotros estábamos viendo. Entonces yo aproveché para discutir esos aspectos sobre cuando es una ecuación… De hecho, con ellos, yo no trabajé variable, solamente incógnita, porque era solo el comienzo [del trabajo con álgebra]…*

Formador: *Solamente como idea de valor desconocido…*

Luis: *Para mis alumnos, incógnita y variable es la misma cosa. No hay algo que muestre diferencia. Pienso que yo esperaba que ellos hiciesen copia o viniesen con alguna cosa de otras tareas que ya habían hecho. Entonces, [la resolución] seria y = 2,5 x + 5. Yo esperaba que alguien encontrase eso y que lo encontrasen fácilmente, pero no, ellos ponen V de valor, P de precio, y todo bien al cambiar la incógnita, no hay problema. Pero, hasta el punto de percibirlo, muchas cosas ocurren. Creo que fui con muy buena expectativa respecto de esto y no ha ocurrido... Fue más frustración que motivación, pero en general, ellos hicieron la descripción de lo que había para hacer. Aquellos que no consiguieron hacer una expresión, incluso cambiando la variable por incógnita.*

Luciana: *E inclusive para decir que la pregunta era la misma que estaba se repitiendo de otras maneras…*

Luis: *Y algunos [decían]: "pero, profesor ¿no es la misma respuesta de esa de aquí?". Y yo he dicho: "¿Usted cree que es la misma respuesta? Escriba".*

(Encuentro CoP-ReDAMat 01/12/2017)

Los profesores esperaban que los alumnos encontrasen la diferencia entre incógnita y variable, componente de contenido, así como reconociesen expresiones – en el caso, ecuaciones – que modelasen las situaciones en causa en los ítems, teniendo en cuenta que, a la excepción de los alumnos de Luciana, los otros ya habían trabajado con contenidos de álgebra. Todavía, las ideas que emergieron con los alumnos del profesor Luis no sugieren eso, y él expresa cierta frustración. En este sentido, el grupo es provocado a reflexionar sobre posibles causas de esos problemas que, aparentemente, refieren un invariante operacional relacionado con los aspectos cognitivos de los alumnos sobre la significación de Álgebra.

Formador: *Pero ¿no es porque ellos están acostumbrados [los alumnos], tal vez?*

José: *Esa tarea está bien fuera del patrón que nosotros estamos acostumbrados y que ellos están acostumbrados a hacer.*

Luis: *Pero ellos no transponen lo que está en el libro para aquello que ellos están haciendo.*

Luciana: *Ellos no asocian con aquello que ellos ya aprendieron.*

Luis: *Esa transposición de ver allá [en el libro] la incógnita, y ver aquí [en la tarea en cuestión] la incógnita, para ellos son cosas diferentes.*

José: *Pero yo creí que en el primero año [de la Enseñanza Secundaria] ¿no saber lo que es una expresión y lo que es una ecuación?... Ellos deberían saber.*

Formador: *José, usted está invitado para mis primeras clases en el próximo año en el primero año en la facultad, para que usted pueda ver cómo es.*

José: *Tal vez la falta sea nuestra, de dejar pasar. Hablamos de función, construir gráfico... Pero a veces no aparece la cuestión de la variable, otros conceptos… Es una cosa mecánica, construir el gráfico, se va a construir una recta, va a ser una parábola, y así sucesivamente... vámonos adelante. A veces nosotros enseñamos más la técnica y nos olvidamos un poco del concepto, de explorar un poco el concepto.*

Luciana: *Incluso el 9º año, habiendo estudiado en el primer semestre, y nosotros aplicamos [la tarea] ¿cuándo? ¿En septiembre?*

Luis: *Ellos solamente identificaron que no era de segundo grado, porque no tiene exponente.*

Formadora: *Creo que sea nuestra costumbre, de a veces, no trabajar con esos conceptos... Pero nosotros estábamos hablando de los libros didácticos. En los libros, de la manera como explican ¿hay oportunidad para eso? ¿O es más la técnica?*

Luis: *Yo he observado el libro de la 1ª serie [de la Enseñanza Media], en el final, hay algo con el GeoGebra, solamente en el final del libro. Eso en la 1ª serie, y no es comentado. Se va a conocer cuando en la 1ª serie llegue alguna cosa que puede ayudar allí, para resolver. Entonces, si él [el alumno] sabe escribir la expresión, él va a encontrar una respuesta, si no, ni incluso en qué con ayuda él va a conseguir. Los libros dejan mucho que desear.*

[Conversaciones]

Formador: *Pero creo que, en ese sentido, tal vez… José dijo que esa tarea está lejos del patrón. pero ¿quién establece el patrón?*

Luis: *Normalmente, es el profesor.*

Formador: *¿Apoyado en qué?*

Luis: *En el libro [didáctico].*

Luciana: *O en aquello que él consigue buscar fuera del libro.*

José: *Y lo peor es que incluso en la internet usted busca y no es sencillo de encontrar.*

Luis: *Lejos del patrón es difícil de encontrar... Porque, incluso en los videos que hay en YouTube, ellos explican de la misma manera que nosotros con la pizarra, a veces también usan la pizarra.*

Luciana: *Porque, de hecho, la mayoría de los videos es para quién está estudiando para el vestibular, cursinhos[39], esas cosas.*

Luis: *Entrenamiento.*

(Encuentro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

Mientras el formador menciona la cultura de los alumnos (o el contrato didáctico) con relación al aprendizaje de Matemática, José utiliza la primera persona llamando atención de que existe igualmente una cultura con relación a la enseñanza de Matemática, que influencia la manera como lidiamos con las Matemáticas. Así, las reflexiones relacionadas con las dificultades que los alumnos mostraron al lidiar con la tarea generaron cierta frustración en los profesores – especialmente Luis – y sugieren que ellas pueden estar directamente relacionadas con las experiencias que alumnos y profesores tienen en las clases de Matemática. Eso disemina una cultura de las matemáticas guiada para la técnica, la cual, de acuerdo con los profesores, es reflejada en los libros didácticos y otros recursos a los que recurren (como videos en línea). De esta manera, se señala que el conocimiento del profesor, a pesar de esencial, no es suficiente para un cambio de la práctica pedagógica, porque ella sufre substancial influencia de aspectos materiales y contextuales. Señalamos, sin embardo, que esa percepción por parte de los profesores solamente ha emergido en el contexto de las discusiones del grupo porque, cuando realizaron la tarea de manera aislada y solitaria en sus clases, sus testimonios revelan decepción con relación a las expectativas que crearon en cuanto al desempeño de los alumnos en la tarea – especialmente los profesores Luis y José.

39 Nota de traducción: Para acceder los cursos de algunas universidades hay pruebas de las propias instituciones, el *vestibular*, y muchos cursos son ofrecidos en *escuelas* fuera del sistema gubernamental que tienen esa especialidad *son los cursinhos*.

Así, los extractos anteriores y el próximo ilustran cómo diferentes componentes (materiales, matemáticos y didácticos) se entrelazan y son interdependientes en la práctica y para el desarrollo profesional de los profesores de Matemática. Eso ocurre durante las discusiones realizadas, señalando la influencia que la práctica del profesor sufre con relación a los recursos que dispone y las condiciones de trabajo que posee. Ellas interfieren, así, en los esquemas de uso de los recursos y se relaciona directamente con la forma como la Matemática está enfocada en clase, y los extractos siguientes hacen evidente el potencial de prácticas similares con las reportadas para el aprendizaje de profesores.

Formador: *¿Qué piensan ustedes de esa idea de discutir una tarea aquí, llevarla a los alumnos y traerla otra vez?*

Luciana: *Muy interesante.*

Luis: *Buena idea, porque podemos socializar lo que funciona y lo que no funciona.*

Formador: *¿Y ustedes creen que es importante, para el próximo año, continuar pensando en otras tareas? ¿Y discutiendo...?*

Luis: *Creo que podríamos hacelo por series.*

Formador: *Es una buena idea. Entonces en el próximo año vamos a volver en el primer encuentro para saber quién está trabajando con cuál contenido. Y podemos trabajar con esa idea.*

Luciana: *Por lo menos algún contenido, por ejemplo, lo que consideramos [interesante].*

(Encuentro CoP-ReDAMat 01/12/2017).

Gueudet y Trouche (2009) señalan que las experiencias de los profesores, cuando trabajan con diferentes recursos, es esencial para las decisiones acerca de la evolución de los recursos utilizados y de los documentos producidos. El análisis de tareas, seguida por experiencias y discusión colectiva de los resultados provoca reflexiones que articulan componentes materiales, pedagógicas y matemáticas. En ese sentido, ofrece elementos consistentes que funcionan como motivación para el desarrollo profesional del profesor y, por lo tanto, demandan lentes teóricas coherentes para su análisis e interpretación. De esa manera, la reflexión colaborativa antes y después de la práctica contribuyen para evolución del conjunto de recursos de los cuales disponen, así como hacen explícitos los condicionantes para los esquemas de uso que emplean, con sus respectivos éxitos y fracasos. Particularmente, permite avanzar de esquemas ingenuos, que se basan esencialmente en el carácter motivacional de la tecnología para su integración social y pedagógicamente intencionada, con justificaciones maduras sobre lo que conduce al empleo de determinado recurso para determinada situación, o lo que compromete ese empleo y, posiblemente, aspectos que lo inviabilizan, sean ellos de orden material, pedagógica o de contenido.

CONCLUSIONES

Las acciones que hemos realizado en el contexto de la Comunidad de Práctica de Profesores de Matemática (CoP-ReDAMat) han sido guiadas por otras contribuciones teóricas y, en ese contexto, es importante señalar que, cuando los encuentros y discusiones que fueron aquí problematizados fueron realizados, aún no teníamos acceso a la Génesis Documental. De esa manera, la articulación teórico-práctica que aquí presentamos consiste en un ensayo, en el que buscamos identificar la adherencia teórica de la Génesis Documental para basar análisis sobre el desarrollo profesional de profesores de Matemática con relación a la integración de la tecnología en su práctica académica.

Considerando aspectos de la Génesis Instrumental es posible listar elementos guía para analizar los esquemas utilizados por los profesores para que los recursos se conviertan en documentos, para identificar como un conjunto de recursos se transforma a lo largo del tiempo y de las experiencias, especialmente aquellas colectivas.

La dificultad de los profesores aún es grande para cambiar su práctica pedagógica y superar las clases expositivas, desarrolladas por medio de ejemplos seguidos por ejercicios. Cómo señalan Gueudet y Trouche (2009), la evolución de los recursos utilizados y de los documentos desarrollados por un profesor precisa ser considerada en diferentes contextos y períodos de tiempo, de manera que las experiencias de un año académico tengan su debida importancia con relación a cómo va a ser realizada en el año siguiente. Así, una tarea matemática organizada en clase en un determinado año genera recursos para otro año, cuando el profesor se encuentra nuevamente en el mismo nivel educativo (en el mismo grado o curso). Aún así es necesario considerar que un tiempo más corto puede intervenir, de modo que la enseñanza planeada para un determinado asunto puede ser cambiada de acuerdo con lo que ha ocurrido en clase. Períodos más largos también pueden traer cambios importantes, como reformas curriculares o cambio de escuela para el profesor. Cualquiera que sea la escala de tiempo, la integración y apropiación de nuevos recursos es una cuestión compleja.

Nuestras experiencias en la CoP emanan expresiones de preocupación profesionales y personales, que constituyen el mundo del profesor y que son resultados de sus experiencias profesionales, sociales y personales, que son parte de sus sistemas de documentación. A pesar de que los tres profesores sean profesionales de la misma red de enseñanza, trabajen con estudiantes de los mismos niveles de enseñanza y sigan las mismas orientaciones curriculares, los alumnos con los cuáles trabajan son parte de contextos diferentes, cada uno de ellos con su propia experiencia, e interfieren en las experiencias profesionales de esos profesores. Esas experiencias también son influenciadas por componentes de contenido (comprensión y concepción de los contenidos matemáticos trabajados), materiales (recursos físicos y materiales de los cuales disponen), didáctico (orientaciones curriculares, experiencias con los compañeros con quienes trabajan directamente en la escuela, posibilidades de formación profesional que tienen oportunidad). Además, aún existen las presiones a las que son sometidos por las políticas de valorización profesional y salarial, y factores sociales y personales que cada uno de ellos posee y que involucra gran variedad de factores imposibles de ser nombrados y enumerados aquí.

Sistemas de documentación de profesores de matemática basados en características profesionales ofrecen posibilidades para comprender, bajo diferentes aspectos, las características de los profesores, especialmente con relación a su percepción de la realidad que lo cerca en su actividad profesional en un determinado contexto. La participación de los profesores en la CoP, de forma voluntaria, hace evidente su compromiso profesional en buscar medios para superar los desafíos que la profesión les impone, como frustraciones en los alumnos al no diferenciar incógnita de variable o expresión de ecuación, como fue reportado por los profesores en los encuentros realizados para discutir la tarea del taxi. Más allá de eso, las expresiones de los profesores permiten identificar como la tarea del taxi puede integrarse a otros recursos, de las tres diferentes componentes que deben ser consideradas para el análisis de un recurso o un documento, como el libro didáctico, documentos guía, materiales didácticos y pedagógicos, discusiones con los compañeros. Todo ello compone un conjunto de recursos que, desde esquemas de utilización establecidos por los profesores, se van a constituir en un documento que puede futuramente integrar otro recurso en un corto período de tiempo, incluso cuando no consiguieren desarrollarla de acuerdo con lo planeado. Por ejemplo, el profesor José, que, sin ordenadores para utilizar el *applet*, dibujó en la pizarra la ruta del taxi, pero fue conducido para hacer la tarea de nuevo con algunos alumnos utilizando ordenadores poco tiempo después de haber la realizado en clase.

Por lo tanto, cuando es considerada la instrumentación como modo por medio del cual un conjunto de recursos interfiere en la actividad del profesor, y la instrumentalización como forma por la cual la actividad del profesor interfiere en el uso de un conjunto de recursos, identificamos los siguientes elementos como los mínimos tener em cuenta: i) las creencias profesionales del profesor (que el alumno va a conseguir diferenciar ecuación de expresión solamente observando ejemplos); ii) la dinámica productiva del trabajo de profesor (ampliación del tiempo de preparación y menos exposición en las clases); iii) la dimensión constructiva, el diseño y la ejecución de una clase (provocar más el alumno para que él busque soluciones para tareas no cotidianas); aún, iv) la evolución en la práctica del profesor, identificando razones que los hacen utilizar o no componentes materiales, didáctica y de contenido; y v) la relación con la realidad específica y los condicionantes de cada profesor.

REFERENCIAS

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Conhecimento tecnológico e pedagógico de matemática revelado por professores quando relatam suas práticas. *Revista de Educação, Ciências e Matemática Amazônia* - Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática, v.14, n. 31, 2018a.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. *Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, p. 13-25, 2018b.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. Uma Lente Teórica para analisar o potencial das Tecnologias Digitais no Ensino Exploratório de Matemática. *Actas Latinoamerica de Matematica Educativa*, v. 2, p. 738, 2019.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des outils informatiques: le problème de l'ingénierie didactique. In: CORNU, B. (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques.* Paris: PUF, 1992.

ESTEVAM, E. J. G. Comunidades de Prática como arcabouço teórico para a formação de professores e pesquisas sobre a aprendizagem profissional docente. In: CYRINO, M. C. C. T.; DE PAULA, E. F.; RODRIGUES, P. H. *Estudos e Pesquisas sobre a Formação de Professores que ensinam Matemática.* No prelo.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Condicionantes de aprendizagens de professores que ensinam matemática em contextos de comunidades de prática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,* Florianópolis, v. 12, n. 1, p. 227-253, maio 2019.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. *Towards new documentation systems for mathematics teachers?* Educational Studies in Mathematics, 2009, 199–218.

GUEUDET, G., PEPIN, B. TROUCHE, L. *Collective work with resources: an essential dimension for teacher documentation.* ZDM Mathematics Education, 2013, p. 1003–1016.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. *What is technological pedagogical content knowledge?.* Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, v. 9, n. 1, p. 60-70, 2009.

LIMA, L. R.; GERONÇO, S.; BASNIAK, M. I.; MARCZAL, C. Tarefa 1 – Introdução às equações. In: *O GeoGebra e a matemática da educação básica:* números inteiros, equações, matemática financeira, ângulos e razões trigonométricas. Organização de BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. G. E. 1.ed. – Curitiba: Íthala, 2017. 76p.

MISHRA, P.; KOELHLER, M. J. *Technological pedagogical content knowledge:* a framework for teacher knowledge. Teachers College Record, v. 6, 2006, p. 1017– 1054, 2006.

MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.Mathematics Teachers and Digital Tools in MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. *Tools and Mathematics:* Instruments for learning. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

NIESS, M. L.; RONAU, R. N.; SHAFER, K. G., DRISKELL, S. O.; HARPER S. R.; JOHNSTON, C.; BROWNING, C.; ÖZGÜN-KOCA, S. A.; KERSAINT, G. Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education,* v. 9, n. 1, p. 4-24, 2009.

PALIS, G. L R. O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa,* v. 12, n. 3, p. 432-451, 2010.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. Diretrizes Curriculares para a Educação Básica – Matemática. 2008.

PONTE, J. P. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Educação e Matemática,* n. 31, p. 9-20, 1994.

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies:* aproche cognitive des instrumentns contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P. *Los hombres y las tecnologías:* Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Trad. por M. Acosta. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

WENGER, E. C. *Communities of practice:* learning, meaning, and identity. Cambridge: University Press, 1998.

4

Humberto José Bortolossi

MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA:

ALGUNOS ASPECTOS NEUROCIENTÍFICOS EN ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.249-270

INTRODUCCIÓN

GeoGebra es conocido por ser un *software* de matemática dinámica. Aquí, la palabra *dinámica* se refiere a la capacidad del aplicativo traer movimiento a las construcciones: por ejemplo, diferente de lo que ocurre con regla y compás habituales, cuando mueve los elementos geométricos de la construcción, las relaciones geométricas entre eses elementos son mantenidas (pertinencia, paralelismo, perpendicularidad, etc.), generando, así, una variedad de ejemplos de una misma situación geométrica.

La literatura ha apuntado muchos beneficios de ese dinamismo: combatir los efectos de configuraciones prototípicas (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019), descubrir y entender los invariantes geométricos estableciendo una cadena de raciocinios con argumentación lógica y deductiva (GRAVINA, 1996), y comprensión del pensamiento funcional y de la dependencia y la variación de parámetros por medio de la construcción de escenarios animados y simulaciones (BASNIAK, 2019).

Nuestro objetivo en ese trabajo, es apuntar para otra perspectiva sobre el importante papel que el movimiento a través del dinamismo juga en el contexto de enseñanza y aprendizaje: la perspectiva de la Neurociencia y de la Psicología. Para ello, presentamos algunos resultados de trabajos de Pawan Sinha (profesor de visión y neurociencia computacional del Departamento de Ciencias Cerebrales y Cognitivas de MIT en EEUU) y de Barbara Tversky (experta en Psicología cognitiva, profesora emérita de Psicología en Stanford University y profesora de Psicología y Educación en Teachers College, Columbia University, en EEUU). Finalizamos presentando dos actividades con GeoGebra que hemos desarrollado con soporte en las teorías presentadas en una asignatura de la facultad de educación en Matemática de la

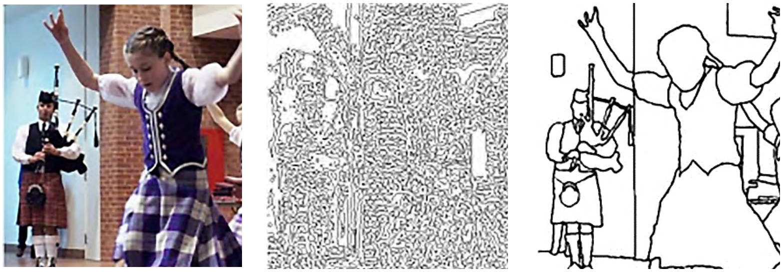
Universidade Federal Fluminense: geometría espacial con realidad aumentada en *smartphones* y tabletas e ingeniería reversa en animaciones matemáticas artísticas.

PAWAN SINHA Y CÓMO EL CEREBRO APRENDE A VER

En una conferencia en *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) en 2007, Pawan Sinha compartió la situación de las personas ciegas en India: 1 en cada 100 indios es ciego y existen más de 1 millón de niños indios ciegos, y 60% de eses casos podrían ser evitados o tratados, pero solamente 20% lo son. ¿Por qué no ocurre el tratamiento? Existen numerosas razones: menos de 10% de los hospitales tienen unidad pediátrica; los médicos de oftalmología pediátrica están concentrados en las grandes ciudades (Nueva Delhi concentra 12% de todos los expertos en oftalmología de India); 75% de las personas ciegas de India viven en pueblos y la mayoría no tiene dinero para el tratamiento. Otra razón que llama la atención es la creencia de que un niño, después de 4 o 5 años de edad, pasaría de su período crítico visual, es decir, ya *no podría aprender a ver*.

Aquí, *ver* significa identificar formas geométricas 2D y 3D, independientemente de la posición y la escala, determinar cuáles objetos están más cercanos y cuáles están más lejos, identificar colores, reconocer rostros, identificar hacia adonde una persona está mirando, entre otras situaciones. Quien ya ha aprendido a ver desde su nacimiento, puede no alcanzar a percibir lo complejo de este proceso. Imagine usted que adquiere la visión siendo adulto y mira una imagen como la de la Figura 1 (A). ¿Cómo decodificar toda la información visual de color y luminiscencia para saber dónde termina un objeto y comienza otro? Especialmente ¿cómo identificar contornos (segmentación) y hacer una integración visual de forma de tener informaciones semánticas sobre los objetos de la escena, como de la Figura 1 (C) y no como de la Figura 1 (B)?

Figura 1 – Segmentación/integración visual de una imagen



(A) *(B)* *(C)*

Fuente: Ostrovsky *et al.* (2009, p. 1485).

El supuesto de que personas con ceguera congénita no podrían aprender a ver después de 4 o 5 años surgió de los trabajos de los neuro fisiologistas David H. Hubel (1926-2013) y Torsten Nils Wiesel (1924-), que identificaron la existencia de un *período crítico visual* en crías de gato. Los investigadores, por medio de experimentaciones, comprobaron que, si se cubre el ojo de un cría de gato entre el décimo cuarto y trigésimo día para que solamente un lado de la corteza visual recibiese estímulos visuales, el animal se quedaría permanentemente ciego de ese ojo. Sin embargo, si ese mismo ojo fuese cerrado un mes después del nacimiento, ningún cambio ocurriría en el cerebro y la visión del gato se iba volver a su normal después de retirado el cierre del ojo. Hubel y Torsten recibieron un Premio Nobel en 1981 por sus estudios sobre períodos críticos en el desarrollo visual de mamíferos.

Pawan Sinha (2009), sin embargo, creyendo que la extrapolación para seres humanos de los resultados sobre períodos críticos obtenidos con crías de gato no fue debidamente probada, concibió el Proyecto

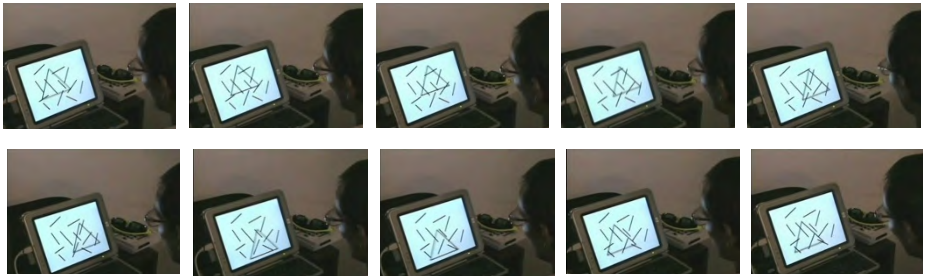
Prakash (https://www.projectprakash.org/). El objetivo del proyecto (entre otros) es el de enseñar ciegos congénitos (con catarata congénita, por ejemplo), a ver después someterse a una cirugía. Sinha desarrolló un esquema de tratamiento de 40 semanas que, de hecho, generaba la capacidad de ver en niños, adolescentes y adultos con ceguera congénita. Segun el investigador, uno de los elementos centrales del tratamiento es el *movimiento* (OSTROVSKY *et al.*, 2009): "La única cosa que el sistema visual precisa para comenzar a analizar el mundo es información dinámica". Las Figuras 2 y 3 ilustran una experiencia en que la cuestión del movimiento aparece en la identificación de objetos.

Figura 2 – Dificultad de identificar un triángulo equilátero en una imagen estática

Fuente: Sinha (2009 – video).

En la Figura 2, la imagen exhibida en la pantalla del ordenador es estática. Usted debe haber identificado el triángulo equilátero en ella. La persona india de la imagen, que también observa la escena estática y que ha recuperado la visión después de adulto, no lo consigue. Sin embargo, cuando el triángulo equilátero es puesto en movimiento (Figura 3), la persona india consigue identificarlo. En el intervalo (11:14-11:54) de Sinha (2009) es posible encontrar este y otro ejemplo.

Figura 3 – El movimiento permite identificar un triángulo equilátero en una animación



Fuente: Sinha (2009 – video).

Así, Pawan Sinha ha conseguido mostrar, con su Proyecto Prakash: (1) que el período crítico visual descubierto em crías de gato no se les aplica a humanos, pues ellos poseen plasticidad visual (es decir, capacidad de adaptación del aparato visual del cerebro) que les ayuda en el aprendizaje visual, y (2) que el movimiento es fundamental en ese aprendizaje.

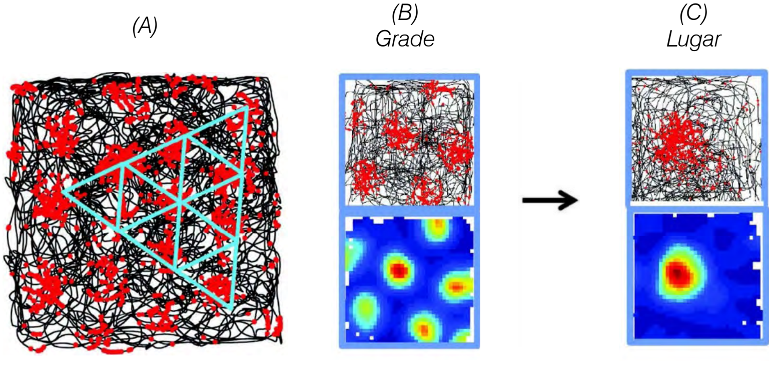
La investigación de Sinha tuvo desarrollos: el descubrimiento de que las ilusiones ópticas como la de Ponzo y de Müller-Lyer (https://bit.ly/2B8H3bc) no son culturalmente construidas y, sí, parecen ser innatas (CHATTERJEE, 2015), y que una de las características del autismo es la dificultad de predicción de movimientos (SINHA *et al.*, 2014).

Para cerrar este apartado, traemos una metáfora para reflexión: las personas aquí descritas son especiales, ellas son como singularidades de un campo vectorial. Como la teoría de sistemas dinámicos bien nos enseña, lo que hemos aprendido con las singularidades nos dice mucho sobre los otros puntos (regulares). El estudio y el descubrimiento de esquemas que son esenciales para las personas especiales también se muestran mucho útiles para las otras personas. El movimiento es uno de esos esquemas.

BARBARA TVERSKY, MAPAS COGNITIVOS Y LOS PENSAMIENTOS ESPACIAL Y ABSTRACTO

En la Figura 4, el gabarato negro describe el movimiento de un ratón moviendose en una caja de base cuadrada (las imágenes exhiben la trayectoria del ratón cuando la caja es mirada desde arriba). Electrodos fueron implantados en neuronas del hipocampo y de la corteza entorrinal de los ratones para acompañar su actividad durante la experimentación. En 1971, los neurocientíficos John O'Keefe y John Dostrovsky descubrieron que células del hipocampo disparaban (emitían una señal eléctrica más frecuente) cuando el ratón estaba en determinados lugares que ya conocía (Figura 4 (C)), como el centro de la caja o en una posición adonde se había hecho alguna marca, como el dibujo de una estrella. Esas neuronas fueron llamadas de *células de lugar* (*place cells,* en inglés). Esto mostró que, en ratones, el hipocampo contiene un tipo de mapa cognitivo del ambiente espacial donde el animal se mueve. Segundo Kandel *et al*. (2014), esa fue la primera evidencia para una representación neural del ambiente, que permite que el animal se mueva de manera deliberada por él.

Figura 4 – El movimiento permite identificar un triángulo equilátero en una animación



Fuente: Moser, Rowland y Moser (2015, p. 3).

De acuerdo con Bear, Connors y Paradiso (2017), se desconoce si existen o no células de lugar en el encéfalo humano. Todavía, estudios utilizando tomografía por emisión de positrones (TEP) han revelado que el hipocampo humano es activado por situaciones que involucren navegación virtual o imaginaria a través del ambiente. Los autores también mencionan un estudio hecho con conductores de taxi en Londres que, para consiguieren una licencia, precisan pasar una prueba rigurosa. Londres posee numerosos puntos de interés distribuidos en sus casi 25 mil calles. Comparando con el grupo de control, los conductores de taxi mostraron poseer un hipocampo posterior mayor e hipocampo anterior más pequeño, por lo tanto, hay correlación entre el tamaño del hipocampo posterior y el tiempo de experiencia del conductor de taxi.

May-Britt Moser, Edvard I. Moser y John O'Keefe, premios Nobel de Medicina de 2014, junto con colaboradores, descubrieron otro tipo de célula, las *células de red* (*grid cells*, en inglés), que también mapean el espacio, pero de una manera diferente. Ubicadas en la corteza entorrinal, las células de red disparan siempre que el animal esté en cualquier de los nudos de una malla triangular, como en las Figuras 4 (A) y (B) (en la comunidad de neurociencia, la malla es vista como hexagonal). Este sistema de referencia permite una ubicación que es independiente de marcas específicas, de señales del ambiente y del contexto, por lo tanto, es alocéntrica (y no egocéntrica). La frontera de la malla corresponde a la frontera natural del ambiente siendo explorado. Cuando un nuevo local es explorado, la malla puede ser calibrada de nuevo, reorientada y, así, adaptada con la nueva situación.

El hecho sorprendente es que, como muestran medidas indirectas de la actividad neural y experiencias con voluntarios con tareas especialmente concebidas (por ejemplo, recordar los ítems de una lista que fue memorizada), las células de lugar y de red muestran tener otras funcionalidades, además de servir como mapa cognitivo espacial advenido de la necesidad evolutiva de movimiento y acción para la sobrevivencia de la especie. De acuerdo con Tversky (2019), células de lugar también disparan con eventos, personas e ideas, y la malla de las células de red es usada para funcionar con informaciones conceptuales, temporales y sociales. De esa manera, el pensamiento espacial y el movimiento asociado a ese tipo de pensamiento son la base (pero no toda la construcción) de los otros tipos de pensamiento: mapas espaciales son usados como mapas conceptuales que permiten el pensamiento abstracto. Así como nuestros pies se mueven de un lugar para otro por caminos espaciales, nuestras mentes se mueven de pensamiento en pensamiento por caminos conceptuales. Espacial, aquí, no significa geométrico o analítico, sino como un gráfico topológico: qué está ligado con qué. Tversky (2019) da el ejemplo de la boca como otro ejemplo de estructura que evoluciona para ganar nuevas funcionalidades: su función primaria es de alimentación, pero la usamos para hablar, silbar, tocar flauta y besar.

Es importante observar cuales características y limitaciones del mapa espacial pueden tener implicaciones para los mapas conceptuales basados en él. Por ejemplo, es reconocida la distorsión existente en la estimación de distancias: somos más precisos con cosas más cercanas y menos precisos con puntos de referencia más distantes. Hay una distorsión similar en estimaciones de dimensión social: las personas acostumbran juzgar a personas más cercanas de su convivencia social de manera diferente a miembros de otros grupos sociales más distantes. Otro ejemplo: en el que se refiere al tiempo, eventos distantes en el pasado en general son considerados próximos uno del otro, pero eventos más recientes, cercanos a nosotros, son considerados más apartados. En términos de número, discriminar grandes cantidades es más difícil que discriminar pequeñas cantidades (Ley de Weber-Fechner).

Como observa Tversky (2019), a pesar de incompletos, ambiguos, inconsistentes y sesgados, esos aparatos espaciales mentales juegan un papel fundamental en nuestras vidas y en nuestras imaginaciones: ellos permiten vislumbrar otros mundos, mundos que aún no fueron vistos, y también mundos imposibles – mundos de ficción, del arte y de la ciencia.

UN EJEMPLO DEL PODER DEL MOVIMIENTO: EL EFECTO MCGURK

Algunas partes del cerebro reaccionan específicamente a estímulos relacionados con movimiento, como la corteza temporal medial y la corteza temporal medial superior. Fotos estáticas de objetos en movimiento (como un jugador de baloncesto lanzando una pelota) activan esas regiones, mientras qe fotos de poses estáticas no.

Un ejemplo clásico que demuestra como el movimiento influencia el cerebro es el conocido Efecto McGurk. Asiste al video https://youtu.be/CE-I6UqYR78. Es importante que usted mantenga sus ojos en la boca del presentador y trate de entender lo que él está hablando (¿"ba", "da", "fa", "pa" o "ga"?) Vuelva al inicio del video y, ahora, con los ojos cerrados, intente identificar lo que él está hablando (¿"ba", "da", "fa", "pa" o "ga"?) ¿La respuesta fue la misma en los dos casos? Durante todo el video, el presentador está hablando "ba", pero en el inicio (cuando él está a la izquierda de la pantalla), hubo una edición de imagen y los movimientos labiales son de "pa". ¡Los movimientos de los labios influencian y cambian la interpretación de lo que usted está oyendo!

Ese tipo de fenómeno fue primero descrito en 1976, por los psicólogos Harry McGurk y John MacDonald en la revista científica

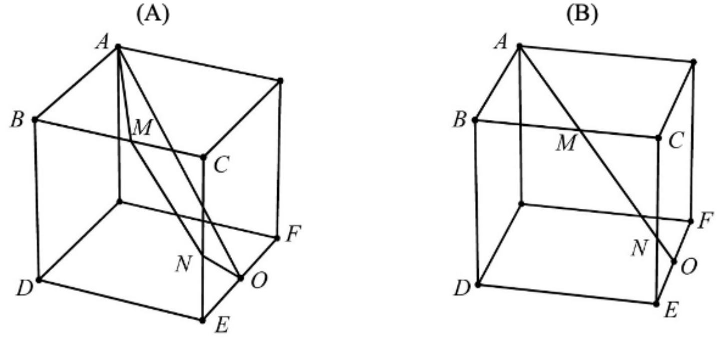
Nature, con el artigo *Hearing Lips and Seeing Voices* (Oír Labios y Ver Voces). El efecto es resistente: tener consciencia del efecto no lo elimina.

Individuos disléxicos exhiben un Efecto McGurk más leve que los lectores normales de la misma edad cronológica, pero exhiben el mismo grado de intensidad que lectores del mismo nivel de lectura. Ciertas condiciones disminuyen el Efecto McGurk: disturbios del espectro de autismo, Dolencia de Alzheimer, esquizofrenia y afasia. La intensidad del Efecto McGurk puede cambiar entre los idiomas: oyentes en los idiomas holandés, inglés, español, alemán, italiano y turco experimentan un efecto robusto de McGurk, mientras es más leve para oyentes japoneses y chinos. Mujeres muestran un Efecto McGurk más pronunciado que los hombres.

MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA: GEOMETRÍA ESPACIAL CON REALIDAD AUMENTADA EN SMARTPHONES Y TABLETAS

Respecto de la Geometría Espacial, una de las dificultades que los alumnos enfrentan es la tarea de reconstruir mentalmente una imagen tridimensional desde una figura bidimensional estática impresa en la página de un libro, o dibujada en la pizarra por el profesor. Como la Geometría Proyectiva bien nos enseña, ese tipo de procedimiento hace posible la ambigüedad, pues dos objetos diferentes pueden tener una misma proyección plana (VOLKERT, 2008). Por ejemplo, en el cubo de la Figura 5 (A), si *M, N* y *O* son los puntos medios de las aristas *BC, CE* y *EF* respectivamente, entonces el segmento *AO* y el camino poligonal formado por la yuxtaposición de los segmentos *AM, MN* y *NO*, vistos de una posición específica, poseen la misma proyección que el diseño en la Figura 5 (B).

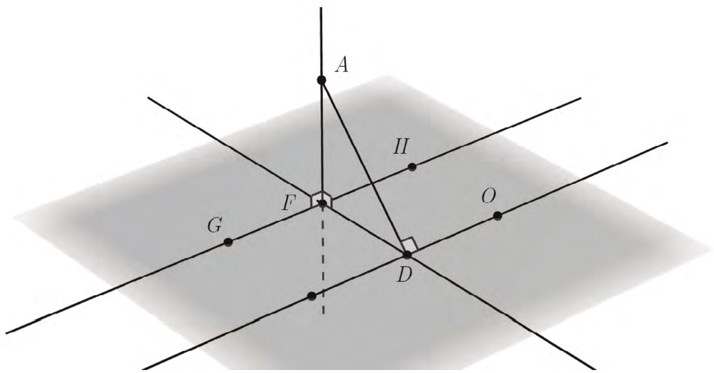
Figura 5 – Un ejemplo de ambigüedad en proyección en perspectiva



Fuente: Desarrollada por el autor.

Otro aspecto que hace complicado en las representaciones 2D de objetos 3D: ángulos frecuentemente aparecen deformados. Considere, por ejemplo, la Figura 6. Los ángulos *AFG, AFD* y *ADO*, en configuración 3D, son todos rectos, pero en la representación 2D correspondiente, obtenida por una proyección en perspectiva, no lo son.

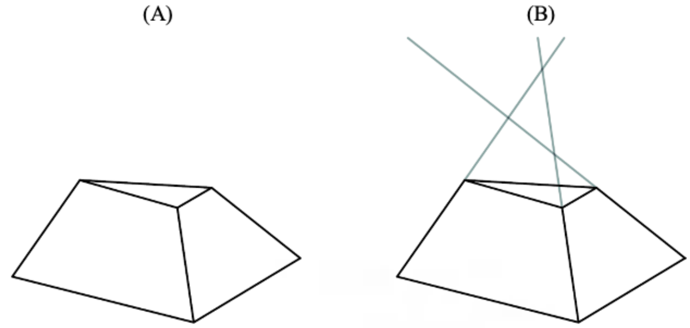
Figura 6 – Deformaciones de ángulos en una proyección en perspectiva



Fuente: Elaboración propia.

Aún más: existen representaciones 2D de objetos 3D que, en un primer momento, pueden parecer adecuadas, pero que de hecho, no lo son. Un ejemplo clásico es la Pirámide de Huffman (HUFFMAN, 1977). El diseño de la Figura (A), parece ser la representación de un tronco de pirámide de base triangular, pero como muestra el dibujo en (B), ese no es el caso.

Figura 7 – Pirámide de Huffman

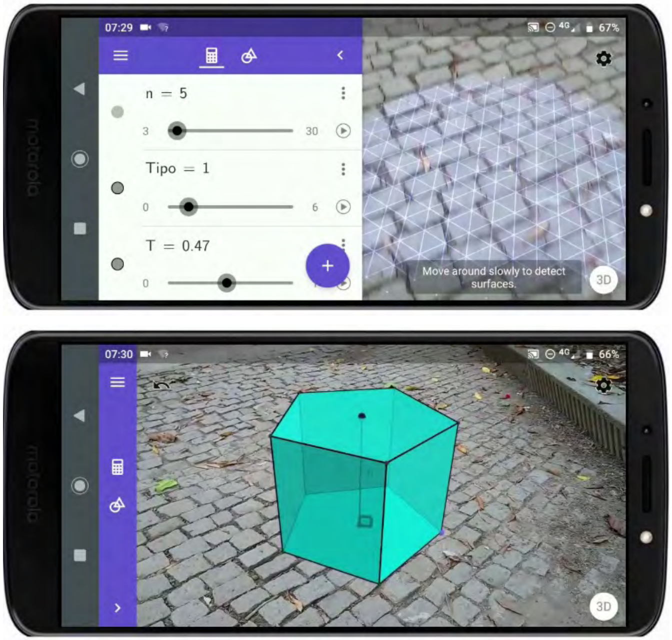


Fuente: Elaboración propia.

Todos los ejemplos muestran que, para entender mejor un objeto tridimensional, es necesario observarlo desde diferentes posiciones. Ciertamente el uso de materiales concretos es un recurso didáctico indispensable, especialmente en los primeros años de educación escolar. Por otra parte, existen ciertas configuraciones y propiedades geométricas que son difíciles de representar concretamente, debido a limitaciones de orden técnica. Sumado al gusto de los alumnos por el ordenador, la tableta, el *smartphone* y softwares como GeoGebra, entonces, se ponen como herramientas promisoras para la enseñanza de Geometría Espacial. Ese potencial se hace más amplio con recursos como el de Realidad Aumentada.

En versiones más recientes del GeoGebra para tabletas y *smartphones*, construcciones hechas en la vista 3D pueden ser proyectadas en superficies planas en realidad aumentada: se activa el modo AR (realidad aumentada), se apunta la camera del dispositivo a una superficie, se camina para que la superficie sea detectada (una malla triangular va a aparecer), se toca en la pantalla para iniciar la proyección en realidad aumentada (Figura 8). Observamos que la tecnología implementada en GeoGebra Realidad Aumentada no necesita el uso de tarjetas o páginas impresas, basta con el dispositivo.

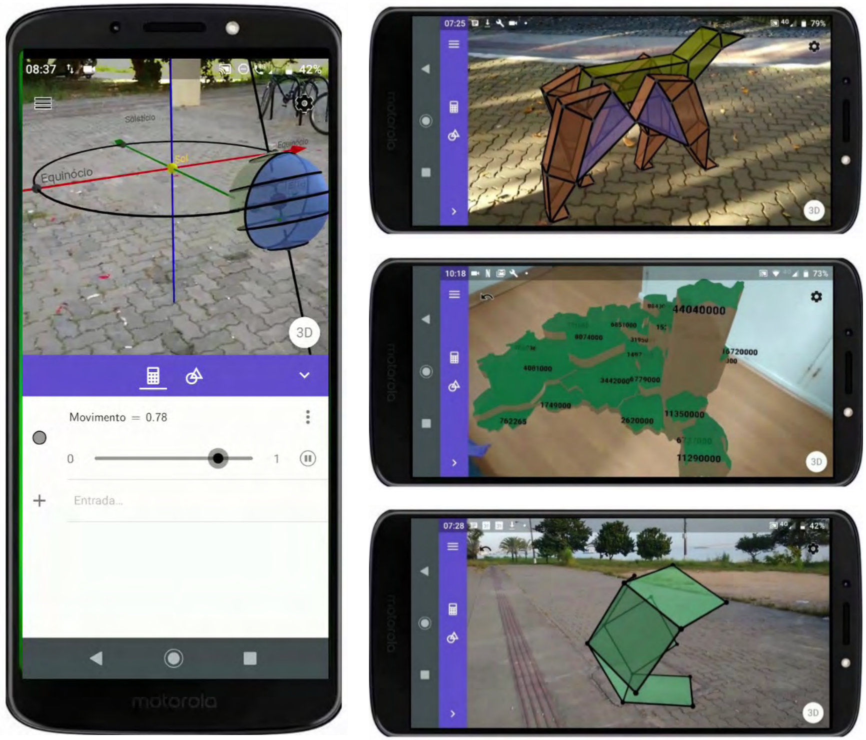
Figura 8 – Realidad Aumentada con GeoGebra en un teléfono celular



Fuente: Acervo del autor (2019 – https://youtu.be/l2B-RS6xrvg).

Luego de proyectar el objeto 3D, el usuario puede ampliarlo, disminuirlo y girarlo; caminar alrededor y dentro de él; cambiar elementos libres, semilibres y parámetros; realizar construcciones geométricas directamente en la proyección; cambiar la apariencia de los objetos (color, grosor, etc.); tomar medidas; y todo en tiempo real (TRAPPMAIR; HOHENWARTER, 2019). Numerosos ejemplos de construcciones con GeoGebra Realidad Aumentada están disponibles en esta *playlist* de YouTube: https://bit.ly/2Yca39v.

Figura 9 – Ejemplos de construcciones con GeoGebra Realidad Aumentada



Fuente: Acervo del autor (2019 – https://bit.ly/2Yca39v).

Pero, ¿cuáles ventajas tiene la Realidad Aumentada frente al modo tradicional de la vista 3D de GeoGebra? Además de los ejercicios de modelación, es decir, construir modelos matemáticos 3D que se sobreponen a los objetos del mundo real, como envases y embalajes (TRAPPMAIR; HOHENWATER, 2019), es nuestra intención apuntar que la tecnología de Realidad Aumentada permite otro tipo de movimiento: aquel del cuerpo del propio usuario cuando interactúa con la escena y la visualiza de posiciones y ángulos de encuadramientos diferentes. En la vista 3D tradicional, el usuario se queda sentado en una silla y mueve la escena en la pantalla del dispositivo. En el modo de Realidad Aumentada, el propio usuario tiene que se moverse por la escena.

La importancia de los gestos y del cuerpo en la comunicación y cognición han sido apuntada por diferentes referencias: Clark (1998), Lakoff y Nuñez (2001), Wilson (2002), Gallagher (2006), Alibali y Nathan (2011), Edwards, Ferrara y Moore-Russo (2014), Freitas y Sinclair (2014), Krause (2015) y Pfeifer y Bongard (2019).

Tversky (2019) -en el capítulo cinco de su obra- reporta numerosas experiencias que hacen evidente el papel de los gestos en el pensamiento. En uno de ellos, los participantes debían describir oralmente relaciones espaciales (por ejemplo, reportar como irse de su casa al trabajo). Aquellos que estaban sentados sobre sus manos (entonces impedidos de moverlas) mostraron dificultades para encontrar palabras al hacer su descripción. El acto de inhibir el movimiento hace más difícil el habla, dificulta el pensamiento. Al igual que las personas ciegas de nacimiento, ya sean jóvenes y adultos que nunca han visto a otras personas haciendo gestos, también usan gestos para comunicarse. Segun Tversky (2019), los gestos nos ayudan a hablar, pensar, cambiar los pensamientos de otros, hacer matemática y música, y promover interacciones sociales.

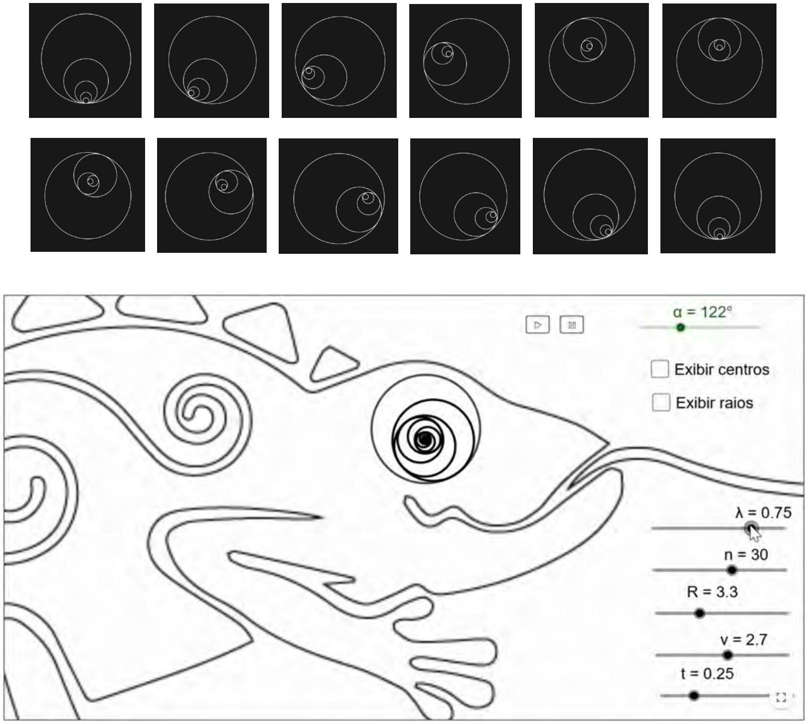
En este contexto, cuando se concibe y se interactúa con construcciones tridimensionales en el módulo de Realidad Aumentada de GeoGebra, el cuerpo y la mente de los alumnos, de manera entrelazada, aprenden estructuras de espacio que son base para otros tipos de pensamientos.

MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA: INGENIERÍA REVERSA EN ANIMACIONES MATEMÁTICAS ARTÍSTICAS

En los grupos y perfiles relacionados con Matemática en las redes sociales, es común encontrar pequeñas animaciones artísticas con motivación matemática. Una búsqueda por los siguientes *hashtags* puede traer una muestra de ese género artístico: #mathart, #geometric y #animation, #codeart, #proceduralart, #generativeart, #algorithmicart. Tal tipo de actividad se encuadra en la educación STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*), un abordaje que procura promover el aprendizaje de manera interdisciplinaria y holística, integrando las asignaturas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemática, estimulando el compromiso, la experimentación, la creatividad, la innovación, la curiosidad, la investigación, la colaboración, la resolución de problemas, el uso y la validación de modelos (KHINE; AREEPATTAMANNIL, 2019).

Uno de los trabajos desarrollados en la asignatura *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas* para la facultad de educación presencial en Matemática de la *Universidade Federal Fluminense*, los alumnos deben dividirse en grupos y cada grupo es responsable por una animación artística. El desafío propuesto es reconstruir la animación en GeoGebra. La Figura 9 exhibe un ejemplo con 12 cuadros de la animación artística y su reconstrucción en GeoGebra. La animación de los círculos encajados era similar al ojo de un camaleón, y se incluyó en la construcción GeoGebra un diseño del animal. Otros ejemplos pueden ser encontrados aquí: https://bit.ly/2XEGvlv.

Figura 9 – Un ejemplo de animación artística: círculos girando dentro de círculos



Fuente: Elaboración propia (2019 – https://www.geogebra.org/m/behy9tau).

La realización de la tarea para cada animación demanda una primera etapa de ingeniería inversa en un abordaje *top-down* de análisis y descomposición (¿cómo el movimiento del todo puede ser descrito en términos de sus elementos?), seguida por una síntesis y reconstrucción en un abordaje *bottom-up* desde los recursos y del poder de expresión que las herramientas que ofece GeoGebra. Para la primera parte, en el proceso de análisis, frecuentemente los alumnos usan el recurso de incluir imágenes de fondo en GeoGebra para hacer mediciones en algunos *frames* de la animación original. También usan el servicio https://ezgif.com/speed, que permite cambiar la velocidad de animación (hacerla más lenta ayuda mucho). Es importante recordar que, en la segunda etapa, los alumnos precisan articular varios objetos matemáticos sintética y analíticamente, con especial atención para las transformaciones geométricas. En términos de producción de animación, la estructura básica normalmente es la interpolación linear

$$P(t) = (1 - t)\,A + t\,B, \quad t \in [0, 1].$$

que al objeto A al objeto B, de un tiempo $t = 0$ a un tiempo $t = 1$ por medio de un deslizador de GeoGebra. Aquí, A y B pueden ser puntos, funciones, matrices (que codifican transformaciones), es decir, elementos de un espacio vectorial. En esta segunda etapa también ocurre un proceso de generalización: mientras los componentes de la animación original están fijos, en GeoGebra es posible incluir parámetros que pueden cambiar la animación. En el caso de la Figura 9, los parámetros incluyen el número de círculos usados (n), el factor de homotecia entre círculos consecutivos (λ), la velocidad (v), además de la posibilidad de mostrar elementos auxiliares (centros y radios de los círculos).

Observamos que, por sus propias características, este tipo de actividad se alínea con los aspectos de reconocimiento de patrones, descomposición, algoritmos y abstracción del Pensamiento Computacional (https://curriculo.cieb.net.br/), ahora considerado en la Base Nacional Común Curricular (BNCC) para la Escuela Básica de Brasil.

CONCLUSIONES

Una de las tareas del investigador en educación es hacer explícito aquello que está invisible en la práctica de la clase. Mientras el movimiento aparece en las construcciones dinámicas de GeoGebra, en los juegos en clase, en los gestos de profesores y alumnos, la razón de hacer lo que se hace (y tal vez sin tener consciencia de ello) puede pasar desapercibida. En ese texto, procuramos traer lentes teóricos de la Psicología y de la Neurociencia para el importante papel que el movimiento juga en la enseñanza, en el aprendizaje y en nuestras vidas de manera general.

Nos gustaría finalizar este texto apuntando hacia la cuestión de la integración de la Psicología y de la Neurociencia a la Educación Matemática: mucho se ha producido recientemente en Psicología y Neurociencia, especialmente en lo que se refiere a los primeros años de escolaridad de los niños, pero esas investigaciones y sus resultados parecen no alcanzar las facultades en las universidades, tampoco la Escuela Básica. Mientras la Educación Matemática parece enfocar cuestiones de *software*, precisamos aprender con los grupos que tratan de *hardware*. Felizmente ya empezaron a aparecer trabajos sistematizados de esa integración, como el libro de Norton y Alibali (2019). Ciertamente necesitamos de más iniciativas como esa.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Carlos Tomei, Carmen Mathias, Cydara Cavedon Ripoll, Diego Lieban, Fabio Simas, Letícia Rangel, Rita de Cássia Silva Costa, Rodrigo Pessanha da Cunha, y Edilson José Curvello Machado por su disposición a leer, revisar y criticar el texto original.

REFERENCIAS

ALIBALI, Martha W.; NATHAN, Mitchell J. Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences,* v. 21, n. 2, p. 247-286, 2011.

BASNIAK, Maria Ivete. *A Construção de Cenários Animados no GeoGebra e O Ensino e A Aprendizagem de Funções.* Comunidad GeoGebra Latinoamericana, 2019. Recuperado de: https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ. Accedido a: 28 feb. 2020.

BEAR, Mark F.; CONNORS, Barry W.; PARADISO, Michael A. *Neurociências: Desvendando O Sistema Nervoso.* Quarta edição. Porto Alegre: Artmed, 2017.

CHATTERJEE, Rhitu. Feature: Giving Blind People Sight Illuminates the Brain's Secrets. *Science*, AAAS, Oct. 22, 2015.

CLARK, Andy. *Being There: Putting Brain, Body, and World Together Again*. MIT Press, 1998.

EDWARDS, Laurie D.; FERRARA, Francesca; MOORE-RUSSO, Deborah. *Emerging Perspectives On Gesture and Embodiment in Mathematics.* Information Age Publishing, Inc., 2014.

FREITAS, Elizabeth de; SINCLAIR, Nathalie. *Mathematics and The Body: Material Entanglements in The Classroom*. Cambridge University Press, 2014.

GALLAGHER, Shaun. *How The Body Shapes The Mind*. Oxford University Press, 2006.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria. *Anais* do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996. Recuperado de: https://goo.gl/djQ7YJ. Accedido a: 8 de maio de 2015.

HUFFMAN, David A. Realizable Configurations of Lines in Pictures of Polyhedra. In: ELCOCK, E. W.; MICHIE, D. (Eds.). *Machine Intelligence 8,* Ellis Horwood, England, p. 493-509, 1977.

KANDEL, Eric R. *et al. Princípios de Neurociências.* Quinta edição. Porto Alegre: Artmed, 2014.

KHINE, Myint Swe; AREEPATTAMANNIL, Shaljan. *STEAM Education:* Theory and Practice. Springer-Verlag, 2019.

KRAUSE, Christina M. *The Mathematics in Our Hands*: How Gestures Contribute To Constructing Mathematical Knowledge. Springer-Verla, 2015.

LAKOFF, George; NUÑEZ, Rafael. *Where Mathematics Come From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books, 2001.

MACHADO, Edilson José Curvello; BORTOLOSSI, Humberto José; ALMEIDA JUNIOR, Rogério Vaz. *Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Recuperado de: http://bit.ly/2I5sLru. Accedido a: 28 feb. 2020.

MOSER, May-Britt; ROWLAND, David C.; MOSER Edvard I. Place Cells, Grid Cells, and Memory. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology,* v. 7, n. 2, a021808, p. 1-15, 2015.

NORTON, Anderson; ALIBALI, Martha W. *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education.* Research in Mathematics Education, Springer-Verlag, 2019.

OSTROVSKY, Yuri *et al.* Visual Parsing After Recovery From Blindness. *Psychological Science*, v. 20, n. 12, p. 1484-1491, 2009.

PFEIFER, Rolf; BONGARD, Josh. *How The Body Shapes The Way We Think: A New View of Intelligence.* MIT Press, 2019.

SINHA, Pawan. *Learning To See in Late Childhood*. MIT Club of Northern California, 2007. Recuperado de: https://vimeo.com/384059. Accedido a: 29 feb. 2020.

SINHA, Pawan. *Pawan Sinha em como O Cérebro Aprender A Ver*. Palestra TED, 2009. Recuperado de: http://bit.ly/32AGv7c. Accedido a: 29 feb. 2020.

SINHA, Pawan et al. Autism as A Disorder of Prediction. *PNAS*, v. 111, n. 42, p. 15220-15225, 2014.

TRAPPMAIR, Andreas; HOHENWARTER, Markus. *Driving Augmented Reality: GeoGebra's New AR Features in Teaching Mathematics*. Proceedings of The 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14: Essen, Germany, 22nd to 25th of July, 2019. Recuperado de: https://bit.ly/3eP1NTA. Accedido a: 3 jun. 2020.

TVERSKY, Barbara. *Mind in Motion: How Action Shapes Thought.* Basic Books, 2019.

VOLKERT, Klaus. *The Problem of Solid Geometry.* Universität Wuppertal, 2008.

WILSON, Margaret. Six Views of Embodied Cognition. *Psychonomic Bulletin & Review,* v. 9, n. 4, p. 625-636, 2002.

5

Sergio Rubio-Pizzorno
Gisela Montiel Espinosa

ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS EN LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.271-312

INTRODUCCIÓN

Es innegable que la tecnología digital ha provocado grandes cambios, o una verdadera revolución, en diferentes ámbitos de la vida personal, laboral y social. Castells (1999) comienza su libro *La Era de la Información* declarando que la revolución de la tecnología de la información[40] ha penetrado todo ámbito de la actividad humana, para luego añadir que esta revolución "está modificando la base material de la sociedad a un ritmo acelerado" (CASTELLS, 1999, p. 27). Por su parte, Serres (2013) sitúa la revolución de las nuevas tecnologías como una de las tres revoluciones principales en la historia de la humanidad, luego de la creación de la escritura y la invención de la imprenta, y reconoce que esta tercera revolución cambió, entre otros, la manera en que se articula la sociedad y cómo se entiende la educación. Cobo y Moravec (2011) caracterizan el cambio social a raíz de esta revolución, describiendo la transición entre paradigmas sociales, desde lo que ellos denominan la sociedad 1.0, 2.0 y 3.0:

> La sociedad 1.0 refleja las normas y prácticas que prevalecieron desde la sociedad preindustrial hasta la sociedad industrial. Por su parte, la sociedad 2.0 hace referencia a las enormes transformaciones sociales que están teniendo lugar en la sociedad actual y que encuentran su origen, principalmente en el cambio tecnológico. Por último, la sociedad 3.0 alude a la sociedad de nuestro futuro más inmediato, para la que se pronostican enormes transformaciones producto del cambio tecnológico acelerado (COBO; MORAVEC, 2011, p. 48).

Es decir, antes de la aparición de la tecnología digital en el panorama humano, la sociedad se caracterizaba por desarrollarse

40 En la literatura se emplean diferentes términos para referirse a un mismo objeto, fenómeno o era, según sea el énfasis de cada autora o autor. En este caso Castells (1999) habla de las *tecnologías de la información*, Serres (2013) de las *nuevas tecnologías*, Cobo y Moravec (2011) usan las siglas TIC haciendo alusión a las *tecnologías de información y comunicación*. En este capítulo se emplea el término *tecnología digital,* para referirse a todas ellas de manera global.

en una materialidad análoga, por un orden jerárquico, una relación mecánica entre diferentes ubicaciones geográficas y una visión del mundo determinista. Luego de su aparición, el paradigma social tiene un giro hacia una materialidad digital, hacia las relaciones heterárquicas de poder entre las personas -horizontales y multidireccionales, a una relación holográfica entre distintas partes y una visión indeterminada del mundo. En la actualidad vivimos en transición entre la sociedad 2.0 y la 3.0, la cual se desarrolla en una materialidad más allá de lo físico y lo digital, es decir, constituida por espacios de diversas naturalezas, el orden entre los sujetos es intencionado o autoorganizado, las relaciones entre diferentes partes son sinérgicas y la visión del mundo es diseñada.

LO OFICIAL Y LO NO OFICIAL

Es posible reconocer que la aparición de la tecnología digital no sólo provocó un cambio material, sino también uno a nivel social, al reconocer que la tecnología es una construcción de nuestras sociedades y mantiene una relación mutuamente constitutiva con ellas. No obstante, este cambio social no se produjo de manera uniforme y estandarizado, por el contrario, se dio de forma heterogénea y diversa según el grado de poder de los grupos sociales.

Rubio-Pizzorno (2018) realiza una distinción respecto a este cambio social distinguiendo dos ámbitos, el *oficial* y el *no oficial,* donde lo oficial lo identifica como “las instituciones, centros de enseñanza u otras instancias, que ejercen cierta autoridad sobre los miembros o conjunto de la sociedad, la nación, el Estado o entidades territoriales” (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3), y lo no oficial lo relaciona a la proliferación y expansión de Internet como herramienta emancipadora, que debido a sus características le ha permitido convertirse en:

> Una instancia de democratización social y apertura a la libre disponibilidad de la información, [...] motivados por la posibilidad que este ámbito les brinda a las personas de incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos o a corto plazo (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3).

De esta manera, se establece una distinción entre lo oficial como las instituciones dominantes en nuestras sociedades, y lo no oficial como las organizaciones preocupadas de las reales necesidades de las personas y sus comunidades.

Sumado a esta distinción, Stacey y Hinchliff Pearson (2017) hablan de la manera en que históricamente se han administrado los recursos y compartido las riquezas, la cual se ha realizado por tres entes: los comunes[41], el Estado y el mercado. Los comunes se refieren a los bienes y recursos administrados y gestionados de forma colectiva, o como propone Rowe (2013, p. 14):

> Los comunes incluyen todo nuestro sistema de soporte vital, tanto natural como social. El aire y los océanos, la red de especies, la naturaleza salvaje y la corriente de agua -todas son partes de lo común. También lo son el idioma y el conocimiento, las aceras y las plazas públicas, las historias infantiles y los procesos democráticos. Algunas porciones de los comunes son regalos de la naturaleza, otras son producto del esfuerzo humano. Algunas son nuevas, como Internet; otras son antiguas como la tierra y la caligrafía.

Con base en los aportes de Rubio-Pizzorno (2018) y de Stacey y Hinchliff Pearson (2017), en el presente capítulo se considera al ámbito *oficial* como lo representado por el Estado y el mercado, preocupados por atender las necesidades institucionales y

41 *Los comunes* es el término que se consensuó para referirse a *the commons*, en la traducción al español del libro *Made With Creative Commons* de Stacey y Hinchliff Pearson (2017). Para revisar la reflexión sobre las diferentes traducciones e interpretaciones al español del término *the commons*, se recomienda revisar el apartado *La traducción de The Commons* en Stacey y Hinchliff Pearson (2019, p. 17), cuya versión en pdf está disponible de manera abierta en http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho_con_cc.pdf.

corporativas, y que además actualmente son las formas dominantes en nuestras sociedades, incluso siendo a veces difícil determinar los límites entre uno y otro. Por su parte, lo *no oficial* se refiere al ámbito representado por *los comunes*, relacionado con la posibilidad que tienen las personas y sus comunidades de materializar las soluciones a sus problemáticas, donde el uso y desarrollo de tecnología digital y abierta tiene un rol fundamental.

Como ejemplo de esta distinción, la lectora o el lector puede pensar en las comunidades de hackers[42] como grupos sociales que se organizan de manera no oficial, y en las corporaciones tecnológicas que realizan desarrollos principalmente de manera privativa y privada, como organizaciones oficiales. Es importante señalar que, si bien ambos ámbitos producen tecnología digital, estas se diferencian en su propósito y manera de ser desarrolladas: unas de manera abierta y otras de manera cerrada.

Para ilustrar la diferencia entre el software libre y el privativo como construcciones del ámbito no oficial y oficial respectivamente, en tanto tecnología y su producción, se puede recurrir a la metáfora de un plato de comida y su receta:

> El software privativo permite comernos el plato ya cocinado pero nos está prohibido conocer los ingredientes y sus cantidades para cocinarlo en nuestra casa. El software libre tiene a disposición de todo el mundo la receta (código fuente). Así, cualquiera puede replicar la receta o la puede modificar incorporando nuevos ingredientes propios de una región para darle un nuevo sabor y luego compartir esa nueva receta con el mundo entero (GARCÍA GAGO *et al.*, 2020).

42 Para más información sobre la comunidad de hackers, su funcionamiento, propósitos, ética y diferencia de los piratas informáticos o los criminales cibernéticos, se recomienda revisar los textos *Ética Hacker, Seguridad Y Vigilancia* de Soria Guzmán (2016) y *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica de Contreras* (2003).

En educación matemática existen ejemplos de estos tipos de software, como lo son Cabri y GeoGebra, siendo el primero un software privativo, desarrollado por un número limitado de personas (CABRI, 2017), y el segundo un software libre, lo que implica que es una comunidad abierta la que desarrolla el software[43] y no existe ningún cobro monetario por su uso (RUBIO-PIZZORNO, 2020).

CAMBIOS PROVOCADOS POR LA REVOLUCIÓN DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Luego de reconocer que los cambios tecnológicos tienen su impacto en la sociedad, y que estos se dan de manera diferente en los ámbitos oficial y no oficial, es importante ubicar qué tipo de cambios se han provocado por la revolución de la tecnología digital en tales ámbitos.

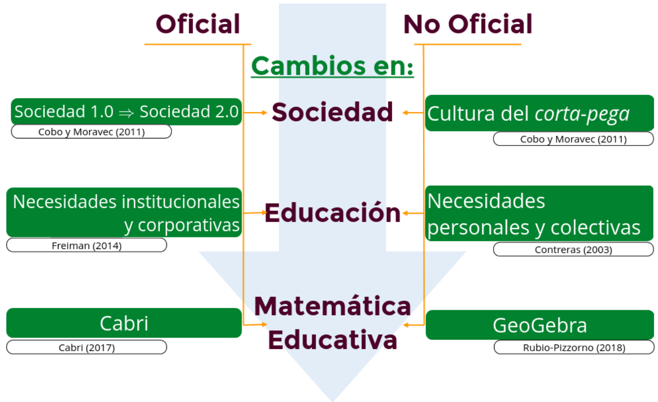
En términos oficiales, ya se ha mencionado el cambio de paradigma de la sociedad 1.0 a la 2.0 a nivel educativo, Freiman (2014) identifica que, en su mayoría, los organismos oficiales se preocuparon de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales, por sobre atender a las necesidades educativas de las personas. Por otra parte, en términos del ámbito no oficial, en un nivel social se reconoce la emergencia del paradigma cultural del *corta-pega*, aludiendo a “la característica de remezclar y reutilizar información ya existente, para dar lugar a significados tan exclusivos y personales como los de las obras originales en las que se basaron” (COBO; MORAVEC, 2011, p. 51). A nivel educativo, existe un movimiento espontáneo, donde las personas buscan atender sus

43 La lectora o el lector puede profundizar en las características del software libre GeoGebra y sus implicaciones sociales en la sección *2.1.3.3. Construcción social de GeoGebra* de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 53 - 65).

necesidades educativas personales y colectivas, usando la tecnología digital y sin necesidad de pasar por un filtro oficial (CONTRERAS, 2003). Por ejemplo, se tiene el desarrollo del software libre GeoGebra y todos los recursos educativos abiertos que se construyen y comparten en su repositorio[44], los cuales son creados y compartidos de manera abierta por los miembros de la comunidad; o el movimiento de los EduTubers, quienes son personas que crean contenido educativo en formato video, los cuales comparten de manera gratuita en YouTube[45].

De manera evidente se puede reconocer una diferencia en los efectos de la revolución de la tecnología digital en los ámbitos oficial y no oficial (ver Figura 1), donde en el primero existe una preocupación por el beneficio económico y las necesidades institucionales y corporativas, mientras que en el segundo se desenvuelve de manera comunitaria y abierta, con una marcada tendencia colectiva y colaborativa que permea a todo este ámbito.

Figura 1 - Cambios producto de revolución de la tecnología digital en los ámbitos oficial y no oficial



Fuente: Imagen adaptada de Rubio-Pizzorno (2018, p. 4).

44 Visitar el repositorio de GeoGebra titulado *Recursos para el aula* en geogebra.org/materials.

45 Para saber más información del movimiento de los EduTubers, se recomienda escuchar el episodio 8 del podcast *Aula Abierta* dedicado a los EduTubers: https://open.spotify.com/episode/6kToPSL8texSQRBHcn98jR

Dado los intereses de los autores del presente capítulo, se siguió focalizando la investigación hacia los efectos de la revolución de la tecnología digital en la Matemática Educativa, especialmente en la posibilidad de indagar la manera en que los aspectos sociales, culturales, colectivos y colaborativos inciden en el fenómeno de aprender y enseñar matemáticas. De esta manera y con base en lo expuesto en esta sección, se proponen las siguientes preguntas para guiar la configuración del marco teórico de este capítulo:

1. ¿Cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?
2. ¿Qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital?

En las siguientes secciones se desarrollan las ideas que permiten abordar estas preguntas.

PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA - METODOLOGÍA

La pregunta sobre *¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?,* conlleva de manera implícita la identificación de un objeto de estudio que trasciende a la Matemática Educativa. Este objeto se relaciona directamente con aspectos de organización social y construcción de conocimiento usando tecnología digital, por lo que fue necesario acudir a explicaciones de disciplinas como la sociología y la antropología, para luego articularlas con aspectos de la matemática educativa que permitieran abordar el fenómeno de manera más robusta, con el propósito de responder a un escenario más cercano a la realidad y menos artificial en términos educativos.

Para desarrollar esta articulación de diferentes disciplinas y organizar sus aportes, nos basamos en la propuesta sobre *producción de conocimiento en matemática educativa* de Lerman (2000), donde emplea la idea de *recontextualización* (BERNSTEIN, 1996 citado en LERMAN, 2000), referida al proceso de adopción de marcos teóricos dentro de un campo. Este proceso se da en el movimiento y adaptación de ideas entre los siguientes niveles de conocimiento:

- **Nivel 1:** Disciplinas circundantes o que sirven de fundamento para la matemática educativa, tales como la psicología, la sociología, la filosofía, la antropología y las matemáticas.
- **Nivel 2:** Matemática educativa y otras áreas curriculares de la investigación educativa.
- **Nivel 3:** Currículo y prácticas de clase.

En cuanto a la producción de conocimiento en matemática educativa, Lerman (2000, p. 20) enfatiza que el segundo nivel de conocimiento "se relaciona de una manera más horizontal con los dominios del primer nivel, más que tener una relación jerárquica con ellos". De esta manera, se reconoce la capacidad de la matemática educativa para producir conocimiento de manera autónoma, y no sólo como una recontextualización de otras disciplinas.

De esta manera, reconocemos que la construcción de conocimiento se puede dar de ambas formas (autónoma y como recontextualización). Y con base en los intereses de los autores y el fenómeno a atender en este capítulo, las disciplinas que sirven de fundamento en este escrito corresponden a la antropología, la sociología y la investigación educativa.

LA TECNOLOGÍA COMO PARTE DE LA SOCIEDAD: ANTROPOLOGÍA

Para estudiar los aspectos de organización social y construcción de conocimiento usando tecnología digital, recurrimos a las explicaciones teóricas de la antropología social, que tiene a la relación entre la cultura y la tecnología como uno de sus objetos de estudios. Al respecto, es posible dar cuenta de un cambio en la manera de estudiar el vínculo cultura-tecnología por la antropología (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015), de donde se pueden diferenciar dos paradigmas generales de investigación:

- **Paradigma tradicional:** Las investigaciones se centran fundamentalmente en el estudio de la tecnología o el cambio tecnológico en las sociedades tradicionales, incurriendo en el reduccionismo de considerar a la tecnología simplemente como un fenómeno de la cultura material de las sociedades. En términos más simples, estas investigaciones consideran a la tecnología como un periférico, que podría estar o no, que se podría poner o quitar de la sociedad sin mayor problema.

- **Paradigma moderno:** Las investigaciones analizan a la tecnología como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Esto con el propósito de ser sensibles a la realidad, si consideramos que “nuestra vida cotidiana es impensable hoy sin el enorme conjunto de artefactos técnicos que nos rodean” (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015, p. 10). De esta manera, se considera a la tecnología como un elemento propio y constitutivo de la sociedad, con lo cual se pasa de considerar una *sociedad con tecnología* a una *sociedad tecnologizada.*

En este escrito nos posicionamos en el paradigma moderno de investigación antropológica para fundamentar el estudio. De esta manera, se está en condiciones de reconocer a la tecnología como parte del "tejido sin costuras de la sociedad, la política y la economía. [O dicho de otra manera], el desarrollo de un artefacto tecnológico [...] no es simplemente un logro técnico; inmerso en él se encuentran las consideraciones sociales, políticas y económicas" (PINCH, 2015, p. 25).

De aquí también se desprende una investigación sobre las comunidades abiertas construyendo conocimientos de diversos tipos, desde la perspectiva de la construcción social de la tecnología digital[46].

ESTRUCTURA SOCIAL EN RED Y SU SOPORTE MATERIAL HÍBRIDO: SOCIOLOGÍA

Si bien el aporte de la antropología permite situar el presente estudio, es necesario precisar más respecto de lo digital. Esto se debe a que ambos paradigmas de investigación antropológica se refieren a la tecnología de manera general, sin considerar las particularidades de la tecnología digital y la influencia que podría tener en la sociedad, la cual *a priori* se puede considerar como diferente de lo que podría provocar la relación con tecnologías no digitales o análogas.

Dada esta situación, Castells (1999) se presenta como un referente general para entender los cambios sociales provocados por la aparición de la tecnología digital en el panorama humano. Uno de los cambios sociales más importantes reportados por Castells (1999) es el posicionamiento de la *sociedad red* como estructura social predominante en nuestras sociedades, o dicho de otra forma,

46 Para más información al respecto se recomienda revisar la sección 2.1 Organización social propiciada por la tecnología digital de la tesis de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 18 – 66).

"aunque la forma en red de la organización social ha existido en otros tiempos y espacios, el nuevo paradigma de la tecnología [digital] [...] proporciona la base material para que su expansión cale toda la estructura social" (CASTELLS, 1999, p. 506).

Específicamente esta base material de la sociedad red es una hibridación armónica -y en algunos casos transparente- entre lo físico y lo digital. Según Castells (1999), lo físico entendido como un espacio social clásico o *espacio de lugares*, y lo digital como un espacio social provisto por la tecnología digital o *espacio de flujos.* A modo de ejemplo revisemos el caso del Coloquio GeoGebra, organizado por la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (RUBIO-PIZZORNO, 2020). En este evento se transmite a toda Latinoamérica y el mundo a través de una videollamada o transmisión abierta, donde un conferencista latinoamericano realiza una presentación sobre algún tema educativo, docente, investigativo o matemático usando GeoGebra. De parte del equipo de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, se cuenta con un moderador(a) quien se encarga de la presentación del conferencista y la gestión de las preguntas del público; y el presentador quien gestiona la sesión en general y da avisos de interés para la comunidad. Cabe destacar que todas las personas que participan del evento se encuentran en diferentes lugares físicos.

Por ejemplo, en la sesión 6 del Coloquio GeoGebra, titulada *Construindo cenários animados no GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de funções* (BASNIAK, 2020), se llevó a cabo con el presentador en Ciudad de México, la moderadora en Lima (Perú), la conferencista en Paraná (Brasil) y los asistentes estaban conectados desde diferentes países de Latinoamérica, quienes estaban físicamente en lugares sociales clásicos -biblioteca, oficina, casa- (COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA, 2019).

Si el Coloquio GeoGebra contara únicamente con un soporte material físico para la actividad académica (sin computador, sin Internet, etc.), la actividad no podría llevarse a cabo. En cambio, al contar con ambientes y tecnología digital que permiten la comunicación sin barreras geográficas, el evento tiene posibilidades de existir y funcionar, ya que el flujo académico natural de esta actividad se da en una simultaneidad de espacios físicos y digitales, es decir, en un soporte material híbrido.

AMPLIACIÓN DE LOS ESPACIOS DE APRENDIZAJE: INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Si consideramos a la educación como una manifestación social, entonces es natural pensar que los cambios en la estructura social provocados por la interacción con la tecnología digital también han influido en la configuración de los espacios educativos. De esta manera, podemos preguntarnos ¿cómo se manifiesta la estructura social en red y su materialidad híbrida en la educación?

Al respecto, Cobo y Moravec (2011) reconocen que gracias a la tecnología digital podemos acceder a contenidos educativos de manera continua y sin restricción de espacios:

> Uno de los principales aportes de la adopción de las tecnologías [digitales] [...] en la vida cotidiana es que ello ha permitido ampliar los límites preestablecidos de lo que tradicionalmente se conocía como espacios de aprendizaje. En otras palabras, la domesticación (e invisibilización) de las tecnologías está abriendo nuevas posibilidades para convertir otros espacios en laboratorios de aprendizaje.
>
> El valor de esta mirada no está en el "qué" se aprende, sino en "cómo", "dónde" y "cuándo" [...]. Esto no significa que el "qué" no sea importante, todo lo contrario, pero también es preciso comprender que las tecnologías digitales han permitido ampliar las dimensiones temporales y espaciales del proceso de aprendizaje. Visto desde una perspectiva cartográfica, podríamos plantear que se amplía el mapa de la ecología del

> aprendizaje. En este nuevo plano, el aprendizaje trasciende los espacios tradicionalmente delimitados para aprender. Tal como hemos señalado, el nuevo panorama del aprendizaje ha de ser en 3D y 360º, incluyendo otros territorios hasta ahora ignorados (COBO; MORAVEC, 2011, p. 111).

Este último punto, sobre la posibilidad de estar ignorando otros territorios no explorados, motiva preguntarse ¿qué otro espacio existe además del físico y digital? Para responderla podemos ver el ejemplo de un juego mundialmente conocido: *Pokémon Go*©[47]. Este juego consiste básicamente en la posibilidad de atrapar pokémones con tu teléfono al recorrer espacios físicos, es decir, al tener abierto el juego en el teléfono, con la cámara se puede explorar el espacio físico y a través de la pantalla se pueden ver los pokémones que van apareciendo, los cuales se puede capturar. En términos que ya hemos utilizado en este escrito, podemos decir que Pókemon Go permite explorar el espacio físico a través de un dispositivo móvil para encontrar objetos digitales en el espacio físico. En la Imagen 2 se puede observar a algunos pokémones sobre el césped, al lado de un árbol, o cómo una abuelita tiene uno de estos bichos digitales entre sus manos.

Figura 2 - Vista de Realidad aumentada de Pókemon Go

Fuente: Imágenes tomadas del juego Pókemon Go©.

47 Más información de este juego en su sitio web: www.pokemongo.com.

¿Podríamos decir que tales objetos digitales están *en* la realidad física, o que la realidad física está incorporándose a la realidad digital? En realidad, podemos decir que las dos opciones tienen algo de certeza, ya que este tipo de interacción "nos da la posibilidad de sobreponer una realidad sobre otra a través de un dispositivo que tenga una pantalla y una cámara. Son dos realidades yuxtapuestas, una encima de la otra" (CCD Radio, s.f.). Por esta razón, a este tipo de espacio se le denomina *realidad aumentada*.

Al igual que la realidad aumentada, es posible encontrar espacios de distinta naturaleza que han comenzado a configurar el soporte material de nuestra sociedad. Por mencionar algunos ejemplos, a los espacios físico y digital se suman la realidad aumentada, el video 360, la realidad virtual, la realidad mixta (ver Figura 3) y la realidad cinemática.

Figura 3 - Relación de espacios respecto de la interactividad (izquierda) y movimiento (derecha)

Fuente: Centro de Cultura Digital (2018).

Por lo tanto, no son sólo los lugares físicos y digitales los que configuran nuevos espacios de aprendizaje, sino que hay espacios de otras naturalezas que son susceptibles de ser usados con fines educativos.

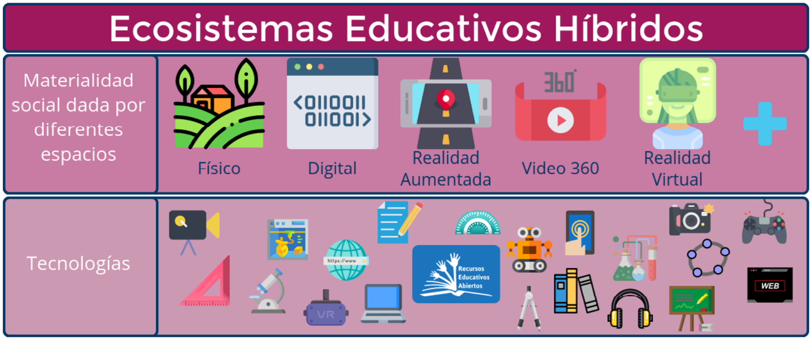
ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS

La primera pregunta planteada al comienzo de este capítulo se cuestiona ¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital? Para abordar la pregunta se comenzó explorando los aportes de la antropología, a partir de los cuales se reconoce la posibilidad de estudiar e investigar a la tecnología como una construcción social. La sociología nos permitió reconocer que la tecnología digital está ampliando la materialidad social, desde una exclusivamente física a una hibridación entre lo físico y lo digital. Por su parte, la investigación educativa nos ayudó a reconocer la existencia otros espacios susceptibles de ser usados con fines educativos, como la realidad aumentada, la realidad mixta, entre otros. Todos estos espacios se suman al clásico espacio físico y al espacio digital para configurar -aludiendo a la metáfora cartográfica de Cobo y Moravec (2011)- nuevos territorios de aprendizaje o, dicho de una manera más económica, configuran nuevos *Ecosistemas Educativos Híbridos*.

De esta manera, gracias a la integración de los aportes de la antropología, la sociología y la investigación educativa, se configura la idea de Ecosistemas Educativos Híbridos para reconocer la materialidad híbrida de nuestras sociedades actuales, la cual está constituida por espacios de diversas naturalezas, que se intersectan, confluyen y se integran de manera armónica y transparente.

Cada uno de los mencionados espacios tiene asociado tecnologías características, aunque no excluyentes de otros espacios (ver Figura 4). Por ejemplo, los teléfonos inteligentes corresponden a una tecnología asociada directamente a lo digital, no obstante, también poseen una materialidad física (e.g. el aparato, la batería, la pantalla, los circuitos) y, dependiendo de sus características, también puede ser parte de una materialidad de realidad aumentada para jugar Pókemon GO. Lo importante está en reconocer la diversidad de espacios convergiendo y el uso educativo que se les puede dar en nuestros Ecosistemas Educativos Híbridos.

Figura 4 - Constitución de los Ecosistemas Educativos Híbridos por niveles



Fuente: Elaboración propia usando íconos de los diseñadores Alfredo Hernandez, DinosoftLabs, Freepik, mavadee, Nikita Golubev, Pixelmeetup Smachicons, surang, turkkub, wanicon de www.flaticon.com; el logo de los REA de la Unesco y el logo de GeoGebra.

En términos educativos, un tipo de tecnología muy identificado con el espacio digital corresponde a los recursos educativos abiertos - REA, de los cuales conviene mencionar algunas de sus características. Los REA son definidos por la Unesco como:

> Cualquier recurso educativo (incluso mapas curriculares, materiales de curso, libros de estudio, streaming de videos, aplicaciones multimedia, podcasts y cualquier material que haya sido diseñado para la enseñanza y el aprendizaje) que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia (BUTCHER, KANWAR; UVALIC-TRUMBIC, 2015, p. 5).

Además de la libre disponibilidad de los REA, también se caracterizan por estar estrechamente ligados al ámbito no oficial en cuanto a su producción, es decir, que son producidos bajo la lógica de los comunes. Si bien existen instituciones del ámbito oficial que elaboran REA, también hay muchas otras organizaciones no oficiales que los producen, es decir, que sus miembros elaboran REA para atender sus propias necesidades o las de su comunidad.

Un ejemplo es la Comunidad GeoGebra, la cual gestiona un repositorio de REA que cuenta con más de un millón de recursos[48], los cuales están elaborados prácticamente en su totalidad por los miembros de la Comunidad GeoGebra, es decir, profesores, estudiantes, investigadores, entusiastas en el uso del software, etc.

Este repositorio en general y la manera comunitaria de crear los REA en particular, es un ejemplo de la forma en que la sociedad red se pone en funcionamiento para construir socialmente una tecnología de manera no oficial.

CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS DE LOS ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS: MATEMÁTICA EDUCATIVA

En la presente sección abordamos la segunda pregunta planteada en la sección 1, referida a ¿qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital?

Si bien Cobo y Moravec (2011) señalan la importancia de hacer énfasis en el *cómo* aprender sobre el *qué* aprender, desde la investigación disciplinar, en este caso desde la matemática educativa, el *qué* aprender -las matemáticas- está en el centro de la investigación.

Particularmente, el caso que nos ocupa, la educación de la geometría, es una de las áreas de la matemática educativa en que más se han investigado los efectos de la tecnología digital:

> La tecnología [digital] en la educación de la geometría se ha convertido en la corriente principal [...] Esto en

48 La lectora o el lector puede visitar el repositorio de la Comunidad GeoGebra, llamado *Recursos para el aula*, en el sitio www.geogebra.org/materials, donde podrá encontrar REA elaborados con GeoGebra en más de 20 idiomas diferentes.

> parte se debe a la manera en que algunas tecnologías, como los ambientes de geometría dinámica, cambian los objetos y los discursos geométricos de manera bastante significativa, en comparación con las aproximaciones con lápiz y papel (SINCLAIR *et al.*, 2016, p. 704).

Además, los mencionados ambientes de geometría dinámica - AGD y el de GeoGebra en particular, son buenos representantes de una tecnología digital que ha sido construida en el ámbito no oficial, por lo cual se presenta como una tecnología propicia para indagar el estado de la investigación en matemática educativa incorporando tecnología digital.

Con esta idea en mente, a continuación se presenta el resultado de una revisión de literatura para entender la manera en que se está utilizando la tecnología digital en la investigación en matemática educativa, focalizando hacia las que emplean AGD. Al respecto, se identificaron tres tendencias en la investigación.

¿CON O SIN TECNOLOGÍA DIGITAL?

Este es el modelo tradicional de investigación sobre los efectos de la tecnología digital en matemática educativa. Son muy abundantes las investigaciones que realizan un comparativo entre realizar tareas con papel y lápiz, o realizarlas en AGD. Algunos ejemplos de esta tendencia en la investigación en matemática educativa son Stylianides y Stylianides (2005), Iranzo y Fortuny (2009), Koyuncu y otros (2015), Hitt y otros (2017a, b).

Esta tendencia de investigación y su pregunta motivadora (¿con o sin tecnología digital?), se corresponde con el paradigma tradicional de investigación antropológica sobre la relación entre la tecnología y la cultura, en la cual se concibe a la tecnología como un periférico de las sociedades, el cual podría estar o no presente en nuestras sociedades sin mayores consecuencias.

AMPLIACIÓN DE LO FÍSICO A LO DIGITAL

La segunda tendencia está marcada por el interés en extender los resultados y conclusiones de la investigación en matemática educativa centrada en los espacios físicos, hacia los espacios digitales. Esta ampliación se ha realizado tanto en la elaboración de diseños didácticos y de recursos, que pueden estar basados o no en la investigación; y en las explicaciones teóricas de los fenómenos asociados a la presencia de la tecnología digital al enseñar o aprender matemáticas.

Al respecto, Sinclair y Yerushalmy (2016) reflexionan sobre este tema en el campo de la investigación en matemática educativa:

> En términos teóricos, hemos notado una tendencia de los investigadores a combinar dos o más perspectivas teóricas para tener en cuenta adecuadamente sus contextos de investigación. A veces, las teorías generales del aprendizaje deben combinarse con teorías que proporcionan un enfoque más centrado en el uso de las herramientas y su papel en la enseñanza y el aprendizaje. Vemos la necesidad de articular mejor las teorías del aprendizaje con las teorías del uso de herramientas, que actualmente se hace, en su mayor parte, combinando enfoques (SINCLAIR; YERUSHALMY, 2016, p. 264).

Así se da muestra de la necesidad de abordar las investigaciones que involucren a la tecnología digital en los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, atendiendo a las explicaciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje, y a las que se centran en el uso de la tecnología digital, y cómo influye esta en la enseñanza y el aprendizaje.

Esta tendencia de investigación se corresponde con una transición entre los paradigmas tradicional y moderno en la investigación antropológica sobre la relación entre la tecnología y la cultura. Esta transición se caracteriza por comenzar a reconocer la necesidad de no trivializar el rol de la tecnología en su relación constituyente con la cultura y, en consecuencia, al estar presente en fenómenos educativos.

ÉNFASIS EPISTÉMICO: LO ESPECÍFICO DE LO DIGITAL EN EDUCACIÓN

La tercera tendencia se caracteriza por el interés en indagar lo específico de aprender o de enseñar matemáticas en espacios digitales. Ya no tiene cabida la pregunta ¿con o sin tecnología digital?, y se van dejando atrás los intentos por extender las explicaciones sobre el uso de tecnología análoga (de espacios físicos) hacia la tecnología digital. Aquí el foco de atención está en reconocer la existencia de un cambio en la manera de interactuar con las matemáticas cuando se emplea tecnología digital.

A lo específico o propio de aprender o enseñar matemáticas con tecnología digital, Artigue (2002, p. 248) lo denomina el *valor epistémico* de las técnicas instrumentadas, “el cual contribuye al entendimiento de los objetos en los que involucra” y, por lo tanto, convertirse en “una fuente de preguntas sobre el conocimiento matemático”. Es importante notar que Artigue reconoce que las técnicas instrumentadas también tienen un *valor pragmático*, referido a “su potencial productivo (eficiencia, costo, campo de validez)” (ARTIGUE, 2002, p. 248).

A modo de ejemplo, algunas investigaciones que se enfocan en el valor epistémico de las técnicas instrumentadas por AGD -aunque no necesariamente lo declaren como parte de su marco teórico- son: la de

Arzarello, Olivero y Robutti (2002), donde se enfocan en las tipologías cognitivas del uso del arrastre por estudiantes al resolver problemas geométricos; la de Laborde (2002), que investiga diferentes tipos de tareas al estudiar geometría, donde identifica que en tales ambientes emergen nuevos tipos de tareas, las cuales únicamente tienen sentido y significado en el AGD, es decir, son tareas que únicamente se pueden resolver en un espacio de tales características; la de Cantoral y Montiel (2014), quienes estudian funciones mediante un tratamiento gráfico, el cual se realiza a través de tres acercamientos: tabulación, transformaciones y operaciones gráficas; la de Sinclair y Yurita (2008), quienes estudian familias de cuadriláteros mediante la examinación de su comportamiento y lo que queda invariante al aplicar el arrastre.

Un aspecto a destacar de esta tendencia es que, así como lo propuso Artigue (2002), en la actualidad la investigación tiene el desafío de buscar el equilibrio entre los valores pragmático y epistémico al involucrar la tecnología digital, ya que ambos valores son inseparables (CHEVALLARD, 1992). Además, Artigue (2009) advierte que esta búsqueda de equilibrio no es una labor fácil y que con frecuencia encuentra resistencia debido a que:

> Las tecnologías digitales hierven sobre el equilibrio tradicional entre el valor pragmático y epistémico de las técnicas que se construyeron dentro de una cultura de papel y lápiz. Una razón esencial para ello es la forma en que los sistemas educativos tienden a adaptarse a las tecnologías digitales, sin reconsiderar sus valores fundamentales, tratando a la tecnología [digital] como un simple adyuvante pedagógico [...]. Esto requiere tareas y situaciones que no sean una simple adaptación de las tareas de papel y lápiz, a menudo tareas sin equivalente en el entorno del papel y el lápiz, por lo tanto, las tareas no son tan fáciles de diseñar cuando ingresas al mundo tecnológico [digital] con tu cultura de papel y lápiz (ARTIGUE, 2009, pp. 467 y 468).

En la última frase de la cita, Artigue propone que la valoración de la tecnología digital en la educación es un asunto cultural, o de manera más precisa, un diálogo entre la cultura tradicional de lápiz y papel con la cultura digital. De aquí que sea natural establecer la relación entre el énfasis epistémico con el paradigma moderno de investigación antropológica sobre el vínculo tecnología-cultura, el cual asume a la tecnología (digital) como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Dicho de otro modo, la tecnología es parte de la cultura y, a su vez, de la sociedad.

ECOSISTEMA EDUCATIVO HÍBRIDO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Así como se comentó en la sección 3, el presente trabajo se posiciona en el paradigma moderno de investigación antropológica, por lo que es relevante para el propósito de responder a la segunda pregunta planteada en la sección 1 relativa a qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital, abordar la propuesta de enfatizar en la valoración epistémica de la tecnología digital al estudiar matemáticas, considerada en la sección anterior. No obstante, a la luz de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos, es importante reconocer que en estos ecosistemas intervienen otros espacios además del físico y digital, como la realidad aumentada o el video 360.

De esta manera, es sensato preguntarse si es posible explorar el valor epistémico en otras tecnologías diferentes a las digitales y, en definitiva, valorar epistémicamente el uso de las tecnologías de todos los espacios que configuran los Ecosistemas Educativos Híbridos.

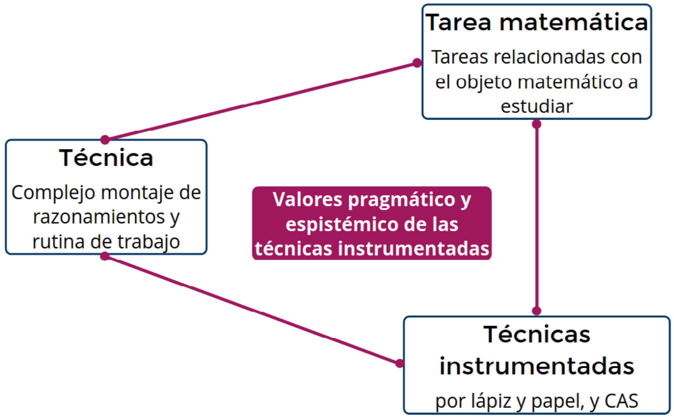
VALORES EPISTÉMICO Y PRAGMÁTICO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Para abordar esta cuestión es necesario remontarse a la propuesta original de Artigue (2002), quien se refiere a los valores epistémico y pragmático exclusivamente de las técnicas matemáticas, donde la técnica es un constructo heredado de la teoría antropológica de lo didáctico - TAD, aunque ampliada por la autora de "una manera de resolver una tarea" a un "complejo montaje de razonamientos y rutina de trabajo" (ARTIGUE, 2002, p. 248). En cuanto a las técnicas analizadas en tal investigación, la autora declara dos tipos: técnicas de lápiz y papel y técnicas instrumentadas[49] (ver Figura 5).

Es interesante notar que cada vez que Artigue habla del valor epistémico o pragmático de una técnica, siempre se está refiriendo a una técnica junto con la tecnología usada en la tarea matemática, ya sea lápiz y papel o tecnología digital. De lo cual se puede inferir la relación indisoluble entre la técnica y la tecnología utilizada en la tarea matemática. Esta inferencia cobra más sentido cuando se examinan las bases de la distinción entre el valor pragmático y el epistémico, la cual es original de la ergonomía cognitiva (VÉRILLON; RABARDEL, 1995) y está referido al esquema de uso de la tecnología. De esta manera, los *valores epistémico y pragmático de la técnica* es una articulación entre constructos de la ergonomía cognitiva y la TAD (ARTIGUE, 2007), articulación que se enmarca en la propuesta teórica conocida como *aproximación instrumental* (ARTIGUE, 2002).

49 Artigue (2002) se refiere a las *técnicas instrumentadas* para hablar de las *técnicas instrumentadas por tecnologías computacionales.* Por lo tanto, cuando en este escrito aparezca la frase técnica instrumentada, la lectora o el lector puede asumir -sin pérdida de precisión- que se está hablando de técnicas al usar tecnología digital. Aclaración necesaria para mantener la coherencia de términos usados en el presente capítulo.

Figura 5 - Valores pragmático y epistémico de las técnicas instrumentadas



Fuente: Elaborado con base en Artigue (2002).

Sumado a esto, el uso de estos términos en la literatura especializada es flexible, añadiendo otros en lugar de referirse a la técnica. Por ejemplo, en Sinclair *et al*. (2009), respecto del desarrollo de tareas en un AGD y el uso del arrastre, hablan de los valores epistémico y pragmático de las *prácticas instrumentadas*, de las *acciones*, de la *herramienta* y de la *práctica*. En Monaghan y Trouche (2016), respecto del diseño de tareas con herramientas digitales, se refieren al *valor epistémico de la tarea*, aunque necesitan hacer la aclaración al pie de página, de que tal frase se puede considerar como una abreviación del *valor epistémico de la técnica requerida para resolver la tarea*. Por su parte, Artigue (2009), haciendo una reflexión de su investigación del 2002, se refiere al *poder epistémico y pragmático de la tecnología.*

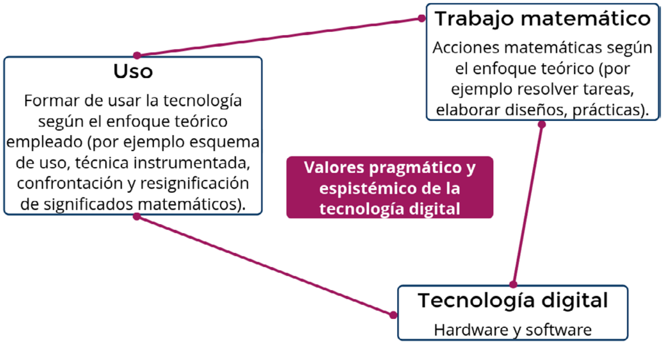
Considerando el uso indisoluble entre técnica y tecnología, el origen de la distinción entre los valores epistémico y pragmático al usar tecnologías, y a la flexibilidad en el uso del término referido a la *técnica* en la literatura especializada, es posible reconocer que el constructo *valores epistémico y pragmático de la técnica* se debe al posicionamiento teórico y los intereses de Artigue, quien tenía el objetivo de hacerse con herramientas teóricas que le permitieran dar cuenta del rol de los instrumentos y del trabajo técnico, para lo cual declara que "las aproximaciones antropológicas y socioculturales parecen ser más sensibles al rol que juegan los instrumentos en el trabajo matemático, y para tomar en cuenta de manera apropiada el rol del 'trabajo técnico'" (ARTIGUE, 2009, p. 47). De aquí el marcado acento en la técnica.

Bajo estas consideraciones, se puede ampliar el constructo *técnica instrumentada al uso -en sentido amplio- de la tecnología digital* al desarrollar un trabajo matemático (e.g. resolver tareas, solucionar problemas, elaborar diseños). El uso de la tecnología digital se verá, entonces, permeado por la teoría empleada en la investigación correspondiente, pudiendo traducirse en el estudio del artefacto si se trabaja con la ergonomía cognitiva, en el estudio de técnicas instrumentadas si se trabaja con la aproximación instrumental, en el estudio de la confrontación y resignificación de significados matemáticos con el uso de tecnología digital si se trabaja con la Socioepistemología (RUBIO-PIZZORNO, 2018)[50], entre otros.

Así también, se puede recurrir a la economía de lenguaje para hablar simplemente de los *valores epistémico y pragmático de la tecnología digital* (ver Figura 6), entendiendo que esta valoración se podrá realizar siempre que haya un uso matemático de la tecnología. Es decir, la tecnología digital *per se* no tiene una valoración epistémica o pragmática, sino que esta valoración existe únicamente cuando se realiza un trabajo matemático con la tecnología digital. Como dice Artigue (2002, p. 268), "el valor epistémico [y pragmático], por supuesto, no es algo que pueda definirse de manera absoluta; este depende de los contextos".

50 Para esta cita en particular se recomienda específicamente la sección 2.4.3. *Confrontación de significados matemáticos* (RUBIO-PIZZORNO, 2018, pp. 127 - 133).

Figura 6 - Valores pragmático y epistémico de la tecnología digital



Fuente: Elaboración propia.

VALORES EPISTÉMICO Y PRAGMÁTICO DE LAS TECNOLOGÍAS

Luego de reconocer la posibilidad de valorar epistémica y pragmáticamente a la tecnología digital, queda pendiente explorar la posibilidad de ampliar esta valoración a las tecnologías representativas de otros espacios, como el físico, la realidad aumentada, etc., es decir, de los espacios que constituyen los Ecosistemas Educativos Híbridos.

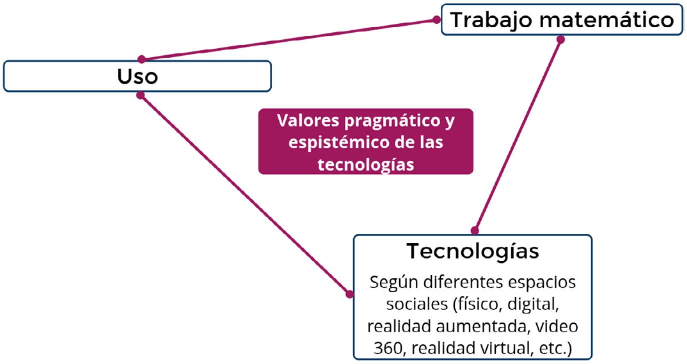
En primer lugar, es necesario recordar que, en la propuesta original sobre los valores epistémico y pragmático de las técnicas, Artigue (2002) reconoce esta valoración para el lápiz y papel (tecnología del espacio físico) y para el CAS (tecnología digital). Por lo tanto, se reconoce la valoración, no sólo de la tecnología digital, sino también de las correspondientes a espacios físicos, como el lápiz y papel.

Por otra parte, la relación entre las matemáticas y la tecnología tiene larga data. Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008) realizan una revisión histórica sobre esta relación, la cual proponen que es una mutuamente constituyente y que se ha dado desde los orígenes de las matemáticas hasta nuestros tiempos, es decir, desde los huesos con marcas realizadas hace 30.000 años a.C. encontrados en Moravia, hasta las tecnologías más recientes. Con base en la revisión histórica, los autores describen cinco etapas de la relación entre las matemáticas y la tecnología, las cuales corresponden a las etapas estática inerte, estática cinestésica/estética, estática computacional, dinámica discreta y dinámica continua.

Aunando la propuesta de Artigue (2002) y la de Moreno-Armella *et al.* (2008) es posible reconocer que las matemáticas y la tecnología siempre han estado relacionadas, desde las muescas en los huesos para contar, hasta la creación de modelos matemáticos en realidad aumentada o virtual, pasando por el ábaco, la calculadora, y el lápiz y papel. Esto nos permite admitir que las tecnologías usadas en cada etapa han servido a un propósito matemático, es decir, para hacer algo matemáticamente. De aquí que podamos proponer que toda tecnología -no importando a qué espacio represente (físico, digital, realidad aumentada, etc.)-, que sea usada para desarrollar un trabajo matemático, tiene sus valores epistémico y pragmático (ver Figura 7). Estos últimos corresponden a:

- **Valor epistémico de las tecnologías:** formas en que las tecnologías ayudan a comprender el objeto matemático y genera preguntas sobre este, al ser usada para desarrollar un trabajo matemático específico.
- **Valor pragmático de las tecnologías:** potencial productivo de las tecnologías, es decir, eficiencia, costo y campo de validez.

Figura 7 - Valores pragmático y epistémico de las tecnologías



Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, hemos podido dar respuesta a las preguntas motivadoras de este estudio, reconociendo la existencia de los Ecosistemas Educativos Híbridos, y la valoración epistémica y pragmática de las tecnologías que representan cada uno de los espacios que constituyen tales ecosistemas, al ser usadas en un trabajo matemático. En el esquema de la Figura 7 se sintetizan los aportes de las explicaciones antropológicas, sociológicas, de investigación educativa y de la matemática educativa, las cuales se han articulado mediante el desarrollo autónomo de la última y la recontextualización de las primeras, con el objetivo de construir conocimiento, tal como planteó en la sección 2.

A modo de operacionalizar esta propuesta, a continuación, se presentan los aspectos a considerar para aprovechar el potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos, ya sea para elaborar diseños educativos, para analizar la implementación de diseños, en la investigación, etc., siempre desde un enfoque teórico específico de la matemática educativa:

I. *Explorar las tecnologías disponibles*, considerando los diferentes espacios sociales.

II. *Posicionarse en un enfoque teórico específico* que permitirá determinar a qué se refiere en particular el trabajo matemático y el uso de las tecnologías para cada caso.

III. *Indagar en los valores epistémico y pragmático de las tecnologías* características de los diferentes espacios, en el desarrollo del trabajo matemático específico.

IV. *Explorar la manera de usar coordinadamente las diferentes tecnologías* para un mejor aprovechamiento de sus valores pragmático y epistémico en desarrollo del trabajo matemático.

En la siguiente sección se muestra, a modo de ejemplo, la elaboración de un diseño educativo siguiendo las pautas de la operacionalización de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la investigación en matemática educativa.

UN EJEMPLO A MODO DE CONCLUSIÓN

En esta sección se presenta un ejemplo para ilustrar el reconocimiento y aprovechamiento del potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la matemática educativa, específicamente con el uso de GeoGebra. Se utilizan los cuatro puntos de operacionalización de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos recién declarados para analizar el ejemplo. Este corresponde al diseño de un REA construido en un Libro GeoGebra articulando tecnologías de los espacios físico y digital, para el estudio de la conservación de áreas. Este REA fue diseñado por Álvarez Zamorano (2018) como parte del *Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas* reportado en el trabajo de Rubio-Pizzorno (2018).

Cabe destacar que, para proceder con la operacionalización de los Ecosistemas Educativos Híbridos, primero se atendió a un contenido curricular, ya que el REA se diseñó para ser implementado en condiciones educativas reales, específicamente con un grupo de estudiantes de quinto de primaria de una escuela de México.

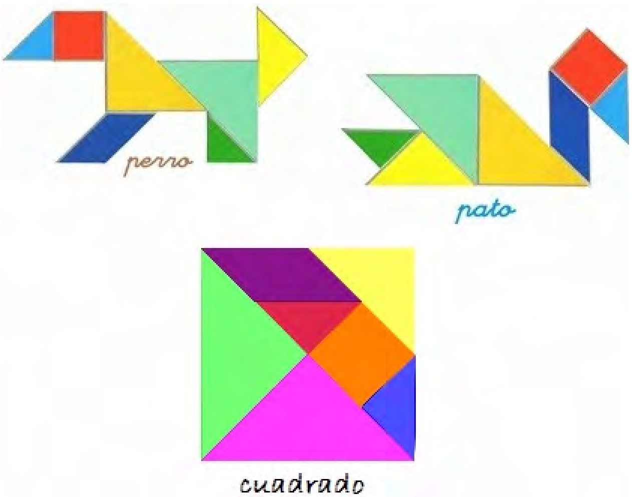
En el Seminario se estaba trabajando con base a la propuesta teórica de la confrontación y resignificación de los significados matemáticos (ver nota al pie número 10). En consecuencia, el trabajo matemático estaba determinado por las prácticas matemáticas realizadas con el uso de las tecnologías, para confrontar los significados asociados a la conservación de área.

Dada la postura teórica, se buscó significados escolares asociados a la conservación de áreas para ser confrontados, los cuales se tomaron de las ideas reportadas por Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), quienes reportan que los niños tienden a pensar que mientras mayor sea el área de las figuras estudiadas, mayor debe ser su perímetro; y que sólo las figuras congruentes tienen igual área.

Con estas dos ideas a confrontar (área-perímetro y congruencia-área), se exploraron las tecnologías disponibles en el ecosistema educativo en el cual interactúa la profesora Alvarez Zamorano y sus estudiantes, de tal manera que pudieran servir a este propósito, es decir, que tuvieran valores epistémico y pragmático que permitiera confrontar estas ideas.

En primer lugar, se consideró el uso del tangram de madera para comparar figuras con igual área, pero con diferentes perímetros, y así confrontar la relación área-perímetro ya descrita. La actividad diseñada consiste en pedirle a los estudiantes que armen diferentes figuras (perro, pato) usando todas las piezas del tangram de madera (ver Figura 8), para que luego pidan el perímetro de cada figura y lo comparen con la otra. Con esta actividad se pretende que los estudiantes puedan identificar figuras que tienen distintos perímetros y suponer que la figura con mayor perímetro también tiene mayor área. Sin embargo, al reflexionar que ambas figuras se armaron con exactamente las mismas piezas, se confronta la idea de que a mayor perímetro mayor área, y también se espera que puedan concluir que figuras que tienen igual área pueden tener diferentes perímetros.

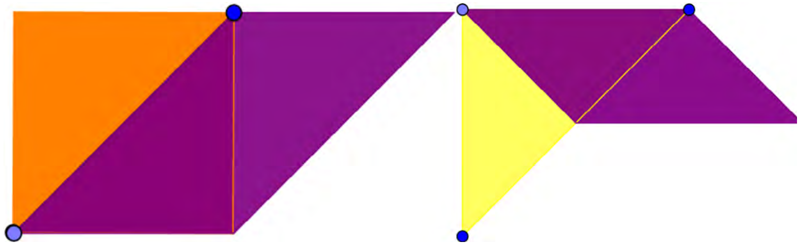
Figura 8 - Diferentes configuraciones del tangram



Fuente: Alvarez Zamorano (2018, p. 41).

En cuanto a la relación congruencia-área, el tangram de madera permite confrontar la idea de que sólo los polígonos congruentes tienen igual área a través de la comparación por superposición de las piezas. Por ejemplo, se puede comparar la superficie del cuadrado, el triángulo amarillo y el romboide (morado), mediante la superposición de las piezas con una configuración específica (como se muestra en la Figura 9). Al realizar esta comparación, se puede observar que el cuadrado y el romboide tienen una superficie común y que las superficies no comunes son triángulos congruentes. Este trabajo matemático de comparación por superposición se puede realizar también con el triángulo amarillo y el romboide, obteniendo el mismo resultado. Ello permite confrontar la idea de que sólo los polígonos congruentes tienen la misma área.

Figura 9 - Comparación de áreas mediante superposición de las piezas

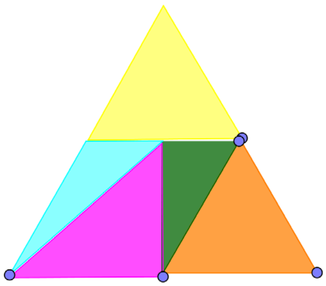


Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.2).

Sin embargo, esta estrategia únicamente involucra la comparación del área de polígonos de diferente tipo, es decir, no permite confrontar esta idea con polígonos de igual tipo. Debido a esta situación, se exploró la posibilidad de usar el AGD de GeoGebra para aprovechar la facilidad con la que se pueden realizar construcciones geométricas precisas.

De esta manera, se elaboró un tangram en AGD de GeoGebra constituido únicamente por triángulos (Figura 10), donde algunos de ellos tienen la misma área.

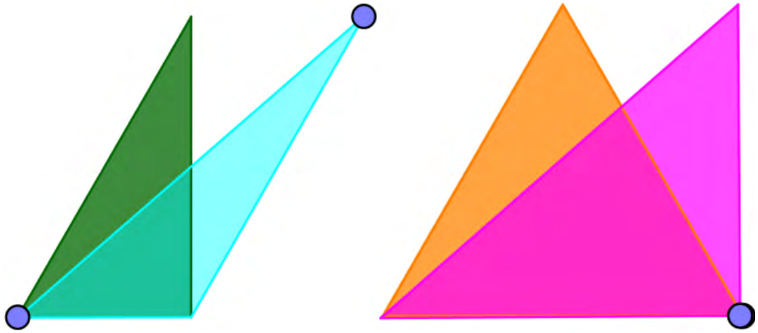
Figura 10 - Tangram triangular



Fuente: Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).

Este tangram permite comparar el área de triángulos diferentes a través de superposición de triángulos, fijando la base y luego analizando si sus alturas respecto de tal base son de la misma longitud (ver Figura 11).

Figura 11 - Comparación de triángulos a través de su base y altura



Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).

Usando el tangram triangular de esta manera, los estudiantes pueden establecer que triángulos no congruentes pueden tener la misma área. Sumando este resultado al obtenido con el tangram de madera, es posible confrontar la idea congruencia-área, es decir, que sólo los polígonos congruentes tienen la misma área.

Finalmente, todas las actividades recién presentadas se incorporaron a un Libro GeoGebra, para establecer una secuencia educativa que aprovechara los valores epistémico y pragmático de cada tecnología, así como el uso coordinado de estas.

En primer lugar, se disponen de las actividades con el tangram de madera, dada la experiencia de los estudiantes de quinto de primaria con los materiales manipulables. Luego se proponen actividades de medición de área y perímetro del tangram y sus piezas, y a continuación se propone la actividad correspondiente a la Figura 8. Para transitar de las actividades con el tangram de madera hacia el uso del AGD de

GeoGebra, se dispone de una actividad para armar las figuras del pato y el perro en un tangram digital para realizar la misma comparación de la relación entre área y perímetro, pero ahora con una tecnología digital. Con el mismo tangram digital también se proponen actividades para comparar el área y el perímetro de las piezas del tangram.

A continuación, se introduce la comparación de triángulos mediante su base y altura, se dispone de una actividad para relacionar el área y el perímetro de triángulos, considerando ambos elementos. Recién en esta parte se introduce el tangram triangular creado con GeoGebra (ver Figura 10), para seguir confrontando la relación congruencia-área.

Además, el Libro GeoGebra se presenta como un ambiente digital para organizar y estructurar las actividades a desarrollar por los estudiantes en ambos espacios (físico y digital) con el uso de diferentes tecnologías (tangram de madera, lápiz y papel, AGD de GeoGebra, preguntas de opción múltiple y de respuesta abierta del Libro GeoGebra, así como la exploración de objetos físicos cotidianos de un aula).

De esta manera, se abordaron las dos ideas sobre conservación de área a confrontar, referidas a la relación área-perímetro y congruencia-área, usando el planteamiento de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la elaboración de un REA. En el Cuadro 1 se expone una síntesis de los elementos involucrados en el planteamiento de los Ecosistemas Educativos Híbridos para la noción de conservación de área recién desarrollada, considerando los siguientes elementos teóricos con base en la confrontación de significados matemáticos (RUBIO-PIZZORNO, 2018).

- **Uso de las tecnologías:** confrontación y resignificación de significados asociados a la conservación de área, con el uso del tangram y del AGD de GeoGebra.

- **Trabajo matemático:** prácticas matemáticas de comparación por superposición o según la base y altura de triángulos.

Tabla 1 - Análisis de los Ecosistemas Educativos Híbridos en Alvarez Zamorano (2018)

Espacios	Tecnologías	Valor epistémico	Valor pragmático
Físico	*Tangram de madera*	*Comparación por superposición de las superficies de las piezas para confrontar la relación entre área y perímetro.*	*Facilidad para manipular sus piezas.*
Digital	*Tangram triangular y digital (GeoGebra)*	*Comparación de triángulos usando la técnica de la altura e igual base, para confrontar la relación congruencia-área.*	*Facilidad para realizar construcciones geométricas precisas.*

Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018).

CONCLUSIONES

Desde el paradigma antropológico moderno de la relación entre la cultura y la tecnología, se consideran a las tecnologías como una construcción social, lo cual nos permite reconocer que son parte natural de nuestros ecosistemas educativos. Así también, desde el aporte de la sociología y la investigación educativa ha sido posible reconocer que, en la actualidad, la materialidad social es una hibridación entre espacios de diferentes naturalezas. De ahí que reconocer la existencia, la validez y el potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos sea consecuencia de abordar la pregunta respecto de cómo se articula la sociedad para construir conocimiento aprovechando las tecnologías.

Los Ecosistemas Educativos Híbridos también representan un espacio de encuentro entre los ámbitos oficial y no oficial, por ejemplo, en una sala de clases, donde la profesora o el profesor realiza su clase para abordar los contenidos curriculares (oficial), pero sobre todo atendiendo a las necesidades educativas que manifiestan sus estudiantes (no oficial). Al respecto, es un propósito de los autores de este capítulo destacar el rol que está jugando el ámbito no oficial en los Ecosistemas Educativos Híbridos, representado por tecnologías libres y recursos abiertos, es decir, por los comunes. La preponderancia que han tomado los comunes en el ámbito educativo se refleja en el establecimiento de comunidades educativas abiertas (RUBIO-PIZZORNO, 2020), quienes generan productos como tecnologías libres (e.g. GeoGebra) y REA, construidos abierta y socialmente, para atender las necesidades educativas personales y comunitarias, sin necesidad de depender del ámbito oficial.

De aquí que la importancia de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos vaya más allá de sólo considerar el aspecto tecnológico. En términos docentes, la importancia radica en que los y las profesoras tengan la oportunidad de atender las necesidades e inquietudes educativas de sus estudiantes, desde una posición de autonomía y empoderamiento docente, que se puede complementar con la obligatoria atención a las normas educativas oficiales. Y esto es posible gracias a que, en primer lugar, ya estamos en condiciones de reconocer la existencia de diferentes espacios sociales con sus respectivas tecnologías, las cuales podemos aprovechar -según su disponibilidad- para nuestros propósitos educativos; en segundo lugar, ya existe un gran acervo de recursos educativos reunidos en múltiples repositorios de REA, donde los profesores pueden buscar y usar los que se ajusten a sus necesidades; y en tercer lugar, existen las condiciones técnicas para que los profesores puedan crear y compartir de manera abierta sus propios recursos educativos.

En términos disciplinares, la propuesta desarrollada en este capítulo representa la oportunidad de aprovechar las tecnologías con un sentido educativo y didáctico más consciente, es decir, aprovecharlas pragmática y epistémicamente, lo cual aborda el cuestionamiento respecto de qué matemáticas y cómo se aprende la en la era digital. Ya somos conscientes de la variedad de espacios sociales y sus tecnologías, los cuales se puede aprovechar en la educación. Además, ya contamos con las herramientas para valorar tales tecnologías con un sentido educativo y didáctico, aprovechando su potencial de uso y las formas en que ayudan a comprender un objeto o noción matemática.

Esto da cuenta de una nueva tendencia de investigación con tecnologías en matemática educativa, que nos propone cuestionarnos sobre los valores pragmático y epistémico de todas las tecnologías.

REFERENCIAS

ALVAREZ ZAMORANO, M. A. *Conservación de área [Libro GeoGebra]*, 2018. Recuperado de: https://mat.geogebra.org/m/MUh7Pzz8

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2002, 7 (3), pp. 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080.

ARTIGUE, M. Digital technologies: A window on theoretical issues in mathematics education. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for research in mathematics education* (Vol. 5, 2007, pp. 68–82). Larnaca, Chipre: University of Cyprus and ERME. Recuperado de: https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/plenaries.pdf

ARTIGUE, M. The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain,* 2009 (pp. 463–475). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., Y ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 2002, 34 (3), 66–72. doi: 10.1007/BF02655708

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 9* (1), 2020, 10-25. ISSN: 2316-8889. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BUTCHER, N., KANWAR, A. Y UVALIC-TRUMBIC, S. *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA).* Francia: UNESCO, 2015. de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986.

CABRI. Cabri Express terms of use. 2017. Recuperado de: https://cabri.com/en/.

CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación, 2014.

CASTELLS, M. La Era de la Información. Economía, Sociedad y Cultura: La Sociedad Red. Volumen I. Siglo XXI, Estado de México, México, 1999.

CCD Radio (Sin fecha). *Inmersión: RV, RA, RM [podcast]*. En Glitch. Recuperado de: https://soundcloud.com/ccd-radio/glitch-2.

CENTRO DE CULTURA DIGITAL. *Cada tecnología inmersiva se relaciona con el movimiento de distinta manera: en video 360 al girar la cabeza movemos la cámara; en #VR podemos desplazarnos en el espacio de una habitación; y en la mixta la libertad de movimiento se abre hacia espacios más extensos. #LabInmersión [twitt]*. 28 de febrero de 2018. Recuperado de: twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. En B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183–203). Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

COBO, C.; MORAVEC, J. W. *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación.* Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2011.

COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA. S06 Construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções [Video]. *Coloquio GeoGebra de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana – Año 1,* sesión 6, 2019. Recuperado de: https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ.

CONTRERAS, P. *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica.* Editorial Gedisa S. A., Barcelona, 2033.

FREIMAN, V. Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education.* 2014, pp. 623–629. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.

GARCÍA GAGO, S.; OBREGÓN, J.; ROBAYO, C.; SPITIA, N.; ALMARAZ FUNES, J.; BRAVO, L. *El software libre en la radio. Migrar la tecnología*. Red de Radios Comunitarias y Software Libre y la Asociación Latinoamericana de Educación y Comunicación Popular (ALER), 2020. Recuperado de: https:https://liberaturadio.org/manual-el-software-libre-en-la-radio/.

HITT, F.; SABOYA, M.; CORTÉS, C. Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers. En: Aldon Gilles; Fernando Hitt; Luciana Bazzini y Uwe Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*, 2017a, pp. 57–74. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-51380-5_4.

HITT, F.; SABOYA, M.; ZAVALA, C. C. Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics,* 2017b, *94* (1), pp. 97–116. doi: 10.1007/s10649-016-9717-4.

IRANZO, N.; FORTUNY, J. M. La influencia conjunta del uso del GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias,* 2009, *27* (3), pp. 433–446.

KOSPENTARIS, G.; SPYROU, P.; LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, *77* (1), pp. 105-127. doi: 10.1007/s10649-011- 9303-8.

KOYUNCU, I.; AKYUZ, D.; CAKIROGLU, E. Investigationg plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in thecnology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 2015, *13* (4), pp. 837–862. doi: 10.1007/s10763-014-9510-8.

LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2002, *6* (3), pp. 283–317. doi: 10.1023/A:1013309728825.

LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. En Joe Boaler (Ed.), Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning. *International Perspectives on Mathematics Education,* 2000, pp. 19–44. Londres, United Kingdom: Ablex.

MONAGHAN, John; TROUCHE, Luc. Tasks and Digital Tools. En: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (eds.) *Tools and Mathematics.* Instruments for learning, 2016, p. 391 - 416.

MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S. J.; KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics,* 2008, *68* (2), 99–111. DOI: 10.1007/s10649-008-9116-6.

PINCH, T. La construcción social de la tecnología: una revisión. En: SANTOS, María Josefa; DÍAZ CRUZ, Rodrigo (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015. capítulo 2, pp. 18–37. Fondo de Cultura Económica, México.

POKÉMON. Recuperado de: www.pokemongo.com.

ROWE, J. *Our Common Wealth. Hidden Economy That Makes Everything Else Work.* Berrett-Koehler Publishers: San Francisco, Estados Unidos, 2013.

RUBIO-PIZZORNO, S. *Integración digital a la práctica del docente de geometría*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), 2018. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1.

RUBIO-PIZZORNO, S. Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto GeoGebra de São Paulo, 9* (1), 10-25. ISSN: 2316-8889, 2020. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

SANTOS, M. J.; DÍAZ CRUZ, R. Voces plurales en los estudios de tecnología y cultura: una introducción. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015, capítulo 1, pp. 9–17. Fondo de Cultura Económica, México.

SERRES, M. *Pulgarcita: el mundo cambió tanto que los jóvenes deben reinventar todo: una manera de vivir juntos, instituciones, una manera de ser y de conocer.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica, 2013.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI BUSSI, M. G.; DE VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education,* 2016, *48* (5), 691–719. DOI: 10.1007/s11858-016-0796-6.

SINCLAIR, N.; YERUSHALMY, M. Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. En: Ángel Gutiérrez; Gilah C. Leder y Paolo Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 2016 pp. 235–274. SensePublishers, Rotterdam. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_7

SINCLAIR, N.; YURITA, V. To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education,* 2008, *10* (2), 135–150. doi: 10.1080/14794800802233670

SORIA GUZMÁN, I. Ética hacker, seguridad y vigilancia. México: Universidad del Claustro de Sor Juana. 2016. ISBN: 987-607-7853-16-9. Recuperado de: http://ru.iiec.unam.mx/3463/1/EticaHackerSeguridadVigilancia.pdf.

STACEY, P.; HINCHLIFF PEARSON, S. *Made With Creative Commons*. Copenhagen, Dinamarca: Ctrl+Alt+Delete Books, 2017. Recuperado de: https://creativecommons.org/made-with-cc/.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2005, *10* (1), pp. 31–47. DOI: 10.1007/s10758-004-6999-x.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education,* 1995*, 10* (1): 77–101.

ORGANIZADORES

Maria Ivete Basniak

Doctora en Educación por la *Universidade Federal do Paraná*, Magíster en Métodos Numéricos en Ingeniería por la *Universidade Estadual do Paraná*. Estágio pós-doctoral en el *Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia* de la Universidad *Tecnológica Federal do Paraná.* Actuó en la Educación Básica, en la Educación de Jóvenes y Adultos, Educación Profesional y formación continua de profesores en tecnologías en la educación como coordinadora pedagógica de la Coordinación Regional de Tecnología en la Educación. Actualmente es profesora Adjunta del *Colegiado de Matemática* de la *Universidade Estadual do Paraná,* campus de la ciudad de *União da Vitória,* y profesora permanente y actual coordinadora adjunta del Programa de Posgrado en Educación Matemática – PRPGEM. Líder del Grupo de Estudios sobre Prácticas y Tecnologías en la Educación Matemática y Estadística (GEPTEmatE).
E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

Sergio Rubio-Pizzorno

Doctorando en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa en Cinvestav; Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) de México; Licenciado en Educación Matemática y Computación por la Universidad de Santiago de Chile. Desde 2019 es Director de la genial Comunidad GeoGebra Latinoamericana, y produce y conduce el podcast *Aula Abierta,* un espacio para explorar lo digital desde una perspectiva educativa, del Centro de Cultura Digital de la Secretaría de Cultura de México. Sus intereses académicos se centran en la Educación Abierta, la Integración Digital a la práctica docente, y el estudio del potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos en el desarrollo del pensamiento matemático.
Correo electrónico: sergio.rubio@cinvestav.mx | https://twitter.com/zergiorubio

AUTORES

Daysi Julissa García-Cuéllar

Doctoranda en Educación Matemática en la Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Magíster en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Licenciada en la especialidad de Matemática-Física en el Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (IPNM). Bachiller en Educación en la Universidad del Sagrado Corazón (UNIFE). Cuenta con especializaciones en Neuropsicopedagogía y procesos cognitivos, Gestión de la formación y capacitación, Didáctica de las matemáticas, Enseñanza de la matemática, Docencia en Matemática y en Tecnologías de la Información y Comunicación para la Educación. Actualmente es miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas IREM –PUCP del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), y forma parte de la coordinación académica de la Comunidad GeoGebra Latioamericana.
Correo electrónico: daysigarcu@gmail.com

Everton José Goldoni Estevam

Doctor en Enseñanza de Ciencias y Educación Matemática por la Universidade Estadual de Londrina – UEL, Maestro en Educación y Licenciado en Matemática por la Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP. Profesor Adjunto del Colegiado de Matemática de la Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR, campus Campo Mourão, y profesor permanente y actual coordinador del Programa de Posgrado en Educación Matemática – PRPGEM. Líder del Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística (GEPTEmatE). Investiga Formación de Profesores que Enseñan Matemática, Prácticas pedagógicas y formativas, y Educación Estadística. Es miembro del GT12 de la SBEM – Enseñanza de Probabilidad y Estadística.
Correo electrónico: evertonjgestevam@gmail.com

Gisela Montiel Espinosa

Doctora en Ciencias en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional - IPN, Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, y Licenciada en Matemáticas Aplicadas y Computación por la Universidad Nacional Autónoma de México. Investigadora adjunta y Coordinadora Académica del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Es Nivel I del Sistema Nacional de Investigadores del Conacyt, en

México. Editora Asociada de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, y miembro activo del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa en México. Actualmente trabaja en las líneas de generación y aplicación de conocimiento sobre Construcción social del pensamiento matemático, Entornos tecnológicos de aprendizaje de las matemáticas y Fundamentos, Historia y Epistemología de las Matemáticas.
Correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx

Humberto Bortolossi

Doctor en Matemática por la Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Maestro en Matemática por el Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Licenciado en Matemática con premio académico (Láurea Acadêmica) por la Universidade Estadual de Maringá. Es profesor Asociado I de la Universidade Federal Fluminense y profesor becado del CEDERJ, actuando en cursos de grado (presencial y a distancia), especialización y maestría profesional, actuando en la formación de profesores de Matemática. Es coordinador del Instituto GeoGebra en Rio de Janeiro - Brasil, miembro del Conselho Diretor da Sociedade Brasileira de Matemática y miembro del equipo del Proyecto Un libro abierto (Um Livro Aberto). Cuenta con experiencia en la concepción y programación de objetos de aprendizaje digitales para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Actualmente es coordinador de la Residência Pedagógica para el núcleo presencial interdisciplinar en Física y Matemática. Se dedica a la cuestión de la enseñanza de Matemática y Estadística con el uso de recursos computacionales y a la concepción de libros didácticos para la Enseñanza Secundaria (Ensino Médio).
E-mail: humbertobortolossi@id.uff.br

Irene Victoria Sánchez-N.

Magister Scientiarum en Matemática mención Docencia por la Universidad del Zulia en la Maracaibo (Venezuela), con Licenciatura en Educación mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Docente en el área de las Ciencias Básicas y actualmente es Académica de la Universidad Arturo Prat (Chile) y Coordinadora de investigación de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la formación de profesores en matemática, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y educación matemática y tecnología digital.
E-mail: irenorono@gmail.com

Ivonne C. Sánchez-S.

Magister en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Universidad Federal do Pará en la ciudad de Belém (Brasil), con Licenciatura en Educación, mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Profesora de Matemáticas y Física en la Escuela Técnica Industrial "Capitán Anselmo Belloso y actualmente es la Coordinadora Administrativa de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la formación de profesores en matemática y uso de tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría.
E-mail: ivonne.1812.@gmail.com

Jesús Victoria Flores Salazar

Doctora y pos-doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo - Brasil. Profesora asociada del Departamento de Ciencias/Sección matemáticas y directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Coordinadora de la línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM-PUCP. Miembro de los grupos de investigación: DIMAT/PUCP; PEA-MAT/PUC-SP y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME. Línea de investigación: Tecnologías digitales. Áreas: mediación de la tecnología en el Trabajo Matemático y en la modelización matemática. Formación continua de profesores con integración de tecnologías. Investigadora Renacyt (María Rostworowski, nivel: I).
Correo electrónico: jvflores@pucp.pe

Juan Luis Prieto G.

Máster en Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona en la ciudad de Bellaterra (España), con Licenciatura en Educación Mención Matemáticas y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Profesor Asociado en la Universidad del Zulia y actualmente es el Coordinador General de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la formación de profesores de matemáticas, didáctica de la geometria y uso de tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
E-mail: juanl.prietog@gmail.com

Luis Andrés Castillo B.

Magister en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Universidad Federal de Pará en la ciudad de Belém (Brasil), con Licenciatura en Educación,

mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Profesor en el Liceo Bolivariano Hugo Montiel Moreno y actualmente es el Coordinador de Tecnologías Digitales y Soporte de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la formación de profesores en matemática y uso de tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría.
E-mail: luiscastleb@gmail.com

Maria Ivete Basniak

Doctora en Educación por la Universidade Federal do Paraná, Magíster en Métodos Numéricos en Ingeniería por la Universidade Estadual do Paraná. Estágio pós-doctoral en el Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia de la Universidad Tecnológica Federal do Paraná. Actuó en la Educación Básica, en la Educación de Jóvenes y Adultos, Educación Profesional y formación continua de profesores en tecnologías en la educación como coordinadora pedagógica de la Coordinación Regional de Tecnología en la Educación. Actualmente es profesora Adjunta del Colegiado de Matemática de la Universidade Estadual do Paraná, campus de la ciudad de União da Vitória, y profesora permanente y actual coordinadora adjunta del Programa de Posgrado en Educación Matemática – PRPGEM. Líder del Grupo de Estudios sobre Prácticas y Tecnologías en la Educación Matemática y Estadística (GEPTEmatE).
E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

Rafael Enrique Gutiérrez Araujo

Magister en Enseñanza e Historia de las Ciencias y de la Matemática por la Universidad Federal do ABC en la ciudad de Santo André (Brasil), con Licenciatura en Educación mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Docente Contratado de Aula por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de la República Bolivariana de Venezuela y actualmente es el Coordinador de Formación de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la lormación de profesores de matemáticas, saberes docentes y tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría.
E-mail: rafael.gutierrez0593@gmail.com

Sergio Rubio-Pizzorno

Doctorando en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa en Cinvestav; Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) de México; Licenciado en Educación Matemática y Computación por la Universidad de Santiago de Chile. Desde 2019 es Director de la genial Comunidad GeoGebra Latinoamericana, y produce y conduce el podcast Aula Abierta, un espacio para explorar lo digital desde una perspectiva educativa, del Centro de Cultura Digital de la Secretaría de Cultura de México. Sus intereses académicos se centran en la Educación Abierta, la Integración Digital a la práctica docente, y el estudio del potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos en el desarrollo del pensamiento matemático.
Correo electrónico: sergio.rubio@cinvestav.mx | *https://twitter.com/zergiorubio*

Stephanie Díaz-Urdaneta

Magister en Educación en Ciencia y Matemática por la Universidad Federal de Paraná en la ciudad de Curitiba (Brasil), con Licenciatura en Educación, mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo (Venezuela). Fue Docente Contratada de Aula por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de la República Bolivariana de Venezuela y Profesora en el Colegio Privado Batalla de Araure. Actualmente es la Secretaria de la Asociación Aprender en Red (Venezuela). Sus intereses de investigación están direccionados hacia la formación de profesores en matemáticas y el uso de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
E-mail: stephaniediazurdaneta@gmail.com

ÍNDICE REMISSIVO

A

abstracto 255, 257
abstrato 102, 104
Algebra 14, 64, 169, 217
América Latina 15, 16, 19, 20, 63, 129, 166, 170, 171, 174, 215, 216
animaciones 171, 251, 265
animaciones matemáticas 251, 265
animações 16, 98, 112
Antropologia 127
antropología 173, 278, 279, 280, 281, 286
aprendizagem 16, 17, 18, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 41, 44, 46, 47, 51, 68, 69, 83, 88, 89, 94, 97, 101, 112, 115, 129, 130, 132, 133, 134, 135, 137, 154, 155, 160, 161, 163, 196, 247, 282, 309
aprendizagem geométrica 17, 24, 27, 41
aprendizaje 43, 44, 64, 160, 171, 172, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 193, 195, 196, 198, 199, 203, 217, 220, 221, 235, 241, 242, 250, 254, 265, 268, 283, 284, 285, 286, 287, 290, 315, 316, 318
aproximação 17, 25, 122, 143
aproximação instrumental 143
Aproximación Instrumental 172, 198, 199, 200, 203, 206, 207, 208, 213, 215
Aspectos Neurocientíficos 18, 96, 173, 249

C

cálculo 14, 62, 169, 215
cérebro 98, 99, 101, 105
comunidade 14, 15, 20, 21, 103, 122, 123, 124, 134
conceitualidade 30, 31, 33, 39, 41
conceptualidad 182, 183, 184, 185, 191, 193
conhecimento 17, 20, 54, 60, 63, 68, 82, 84, 89, 95, 121, 125, 126, 127, 132, 138, 146, 152, 153, 160, 247
conocimiento 43, 166, 172, 195, 207, 212, 215, 220, 234, 236, 241, 274, 278, 279, 280, 285, 291, 299, 306, 315
cultural 25, 26, 27, 28, 29, 30, 43, 123, 127, 139, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 195, 276, 280, 292, 293

D

desarrollo 64, 166, 167, 168, 172, 174, 176, 178, 179, 180, 183, 198, 199, 205, 208, 215, 216, 221, 225, 226, 227, 228, 231, 234, 242, 243, 252, 275, 277, 281, 295, 299, 300, 313, 318
desenvolvedores 14, 21
desenvolvimento 14, 17, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 31, 46, 47, 53, 56, 62, 69, 70, 73, 74, 75, 79, 82, 89, 90, 91, 95, 99, 122, 124, 128, 142, 145, 146, 158, 163, 248
digital 43, 44, 47, 48, 50, 51, 69, 119, 120, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 147, 150, 151, 152, 153, 156, 158, 160, 163, 195, 196, 199, 200, 202, 203, 221, 272, 273, 275, 276, 277, 278, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 296, 297, 298, 300, 305, 306, 308, 311, 313, 315, 318
dinâmica 14, 18, 21, 30, 42, 85, 93, 97, 100, 136, 144
disciplinas 16, 112, 125, 126, 171, 278, 279
docente 17, 44, 63, 68, 74, 94, 153, 156, 158, 163, 172, 196, 216, 220, 227, 247, 282, 307, 311, 313, 318

E

Ecosistemas Educativos 173, 271, 285, 286, 287, 288, 293, 297, 299, 300, 301, 305, 306, 307, 313, 318

ecossistemas educacionais 18, 152
educação 20, 21, 27, 43, 65, 95, 97, 112, 114, 119, 123, 130, 135, 138, 139, 153, 158, 160, 162, 166, 195, 217, 247
Educação 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 29, 41, 43, 46, 50, 61, 62, 82, 94, 95, 115, 116, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 166, 195, 246, 247, 248, 269, 314
Educação Matemática 16, 17, 18, 19, 20, 22, 26, 29, 43, 46, 50, 61, 62, 94, 95, 115, 158, 159, 161, 162, 163, 166, 195, 246, 247, 314
elaboração 42, 84, 137, 146, 151
engenharia 98, 112, 113
engenharia reversa 98, 112, 113
Enseñanza 43, 156, 159, 161, 171, 173, 176, 195, 221, 238, 240, 249, 265, 310, 314, 315, 316, 317
Ensino 18, 24, 46, 47, 69, 86, 94, 96, 112, 115, 158, 159, 160, 162, 176, 246, 269, 313, 315, 317
epistémico 141, 143, 147, 154, 173, 200, 201, 202, 212, 213, 215, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 304, 306, 308
espacial 98, 102, 103, 104, 106, 251, 255, 257, 259
espaço 14, 27, 41, 103, 111, 114, 129, 131, 132, 133, 134, 138, 144, 145, 158, 163
estatística 14
estudantes 14, 15, 26, 27, 47, 55, 56, 58, 61, 62, 63, 92, 134, 135, 138, 147, 148, 150, 151, 153
estudio 64, 65, 172, 175, 177, 182, 213, 214, 215, 217, 222, 225, 228, 254, 256, 278, 280, 281, 287, 296, 299, 300, 313, 318
estudo 17, 25, 30, 61, 62, 70, 73, 76, 101, 103, 125, 127, 128, 134, 142, 143, 145, 147, 158, 163
experiencia 43, 183, 195, 199, 208, 209, 228, 235, 238, 244, 253, 256, 304, 315
experiência 31, 47, 56, 57, 76, 83, 86, 92, 103, 150, 160

F

físico 120, 129, 131, 132, 133, 137, 140, 144, 145, 147, 151, 273, 282, 284, 285, 286, 290, 293, 297, 298, 300, 305

G

gênese documental 74, 75
Génesis Documental 172, 216, 222, 223, 226, 227, 236, 243
GeoGebra 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 56, 58, 60, 62, 64, 65, 76, 79, 88, 95, 96, 97, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 123, 124, 129, 134, 135, 136, 147, 149, 150, 151, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 166, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 193, 194, 195, 196, 201, 202, 203, 204, 208, 209, 211, 212, 213, 215, 217, 229, 231, 240, 247, 249, 250, 259, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 276, 277, 282, 287, 288, 289, 300, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 313, 314, 315, 318
geometria 14, 18, 24, 25, 98, 106, 135, 136, 138, 161, 162, 316
geometría 156, 169, 173, 176, 177, 251, 259, 288, 289, 292, 311, 316, 317
geometria analítica 14
geometria espacial 98, 106
geometría espacial 251, 259
geométrica 17, 18, 24, 27, 31, 32, 41, 97, 173, 183, 184, 250
geométrico 34, 41, 104, 172, 175, 176, 179, 186, 193, 257

H

Híbridos 18, 132, 133, 134, 135, 140, 144, 145, 146, 147, 151, 152, 153, 158, 163, 173, 271, 285, 286, 287, 288, 293, 297, 299, 300, 301, 305, 306, 307, 313, 318

I

ingeniería 64, 217, 251, 265, 266
ingeniería reversa 251, 265
instrumental 46, 47, 54, 64, 65, 71, 143, 198, 199, 206, 213, 215, 216, 217, 218, 223, 294, 296

L

Latino-americana 15, 129

M

mapas cognitivos 102, 255
Matemática 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 29, 43, 44, 46, 50, 61, 62, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 73, 76, 77, 78, 82, 86, 88, 89, 91, 94, 95, 96, 98, 112, 115, 116, 125, 126, 135, 147, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 166, 168, 170, 171, 172, 173, 174, 178, 181, 195, 196, 198, 202, 213, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 226, 228, 229, 230, 234, 238, 241, 242, 243, 246, 247, 248, 250, 265, 268, 270, 278, 279, 313, 314, 315, 316, 317, 318
matemática dinâmica 14, 30, 42, 97
matemática educacional 125, 126, 135, 136, 137, 140, 145, 146, 154
matemática educativa 271, 278, 279, 288, 289, 290, 293, 299, 300, 308
Matemáticas 44, 64, 159, 160, 161, 171, 172, 173, 176, 196, 216, 241, 249, 265, 300, 314, 315, 316
Metodologia 125
movimento 18, 33, 72, 97, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 111, 113, 114, 115, 123, 124, 126, 132
Movimentos 18, 96, 106, 112
Movimientos 173, 249, 259, 265
Mudanças 123, 124

N

neurociência 16, 97, 103

O

objetivação 27, 28, 31, 33, 41, 42
Objetivación 44, 172, 175, 176, 196
objeto 14, 29, 32, 34, 40, 41, 63, 98, 108, 109, 119, 125, 145, 153, 169, 181, 184, 186, 189, 190, 192, 193, 215, 251, 261, 262, 267, 272, 278, 298, 308
oficial 120, 121, 122, 123, 124, 134, 135, 136, 152, 273, 274, 275, 276, 277, 287, 288, 289, 307

P

Pensamentos 18, 96
Pensamientos 173, 249
Peru 17, 20, 46, 56, 61, 63, 65, 129, 217
pesquisadores 14, 46, 78, 135, 137
pragmático 18, 30, 48, 49, 50, 60, 63, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 150, 152, 154, 173, 182, 200, 201, 202, 212, 213, 215, 291, 292, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 304, 306, 308
probabilidade 14
processos 24, 25, 27, 28, 31, 33, 41, 42, 46, 47, 51, 52, 53, 57, 73, 74, 79, 84, 121, 135, 159
profesional 172, 173, 181, 220, 221, 222, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 234, 235, 242, 243, 245, 315
professores 14, 15, 17, 18, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 42, 68, 69, 70, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 114, 135, 153, 158, 160, 161, 162, 163, 246, 247
profissional 17, 18, 29, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 78, 79, 82, 83, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 160, 247, 248
Projeto 16, 17, 24, 99, 101, 160

psicologia 16, 126

R

realidad aumentada 251, 259, 262, 285, 286, 293, 297, 298
realidade aumentada 98, 106, 109, 132, 133, 140, 144, 145
reconhecimento 18, 24, 34, 39, 114, 146
recta 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 201, 202, 210, 211, 212, 213, 240
representação 14, 33, 34, 35, 74, 79, 102, 107, 108
reta 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 60, 61, 87, 184, 190
revolución 272, 276, 277, 278
rotação 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42
rotación 183, 184, 185, 186, 187, 188, 190, 191, 192, 193, 194

S

saberes 25, 29, 30, 31, 162, 177, 181, 182, 183, 317
saberes geométricos 25, 177
simuladores 16, 24, 42, 43, 44, 171, 176, 194, 195, 196
Simuladores 17, 24, 172, 175, 176
sistemas educacionais 16, 48, 139
smartphones 98, 106, 109, 133, 251, 259, 262
sociedad 272, 273, 276, 278, 280, 281, 282, 285, 288, 293, 306
sociedade 119, 120, 123, 125, 127, 128, 129, 132, 135, 139, 152
Sociologia 128
sociología 173, 278, 279, 281, 286, 306
software 14, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 41, 42, 50, 64, 71, 76, 79, 97, 115, 122, 123, 124, 135, 155, 167, 168, 169, 171, 172, 173, 174, 176, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 187, 189, 193, 194, 202, 217, 224, 229, 231, 250, 268, 275, 276, 277, 288, 310

T

tabletas 251, 259, 262
tablets 98, 106, 109
técnica 31, 33, 34, 38, 40, 41, 42, 48, 49, 50, 55, 56, 60, 85, 87, 88, 89, 108, 128, 140, 141, 142, 152, 183, 185, 186, 190, 192, 193, 194, 200, 201, 202, 207, 208, 212, 213, 237, 240, 241, 261, 294, 295, 296, 306
tecnologia 17, 18, 20, 21, 22, 47, 48, 50, 51, 60, 68, 82, 90, 91, 109, 111, 119, 120, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 150, 152, 160
tecnología 128, 155, 156, 157, 161, 166, 167, 168, 172, 173, 199, 200, 202, 203, 212, 213, 220, 234, 243, 262, 264, 272, 273, 275, 276, 277, 278, 280, 281, 282, 283, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 315, 316
tecnologia digital 47, 48, 50, 51, 119, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 133, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 150, 160
tecnología digital 128, 199, 200, 202, 203, 272, 273, 275, 276, 277, 278, 280, 281, 282, 283, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 296, 297, 305, 315
tecnologias 15, 16, 18, 19, 21, 22, 46, 47, 48, 62, 63, 68, 70, 85, 119, 120, 124, 127, 128, 129, 130, 133, 136, 138, 139, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 147, 151, 152, 153, 154, 158, 161, 162, 163
teoria 17, 20, 25, 26, 43, 46, 66, 76, 101, 140, 142, 195, 218
teorias 16, 18, 97, 137

U

usuários 14, 21

www.pimentacultural.com

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EM PESQUISAS QUE ENVOLVEM TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

o GeoGebra em foco

PERSPECTIVAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS EN INVESTIGACIONES QUE INVOLUCRAN TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

el GeoGebra en foco

pimenta cultural